KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1990 en France, a lieu tous les ans au mois de mars. Plus de 6 millions de jeunes y participent maintenant (hors années covid) et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs de plus de 80 pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, films et logiciels pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

Kangourou 2021 - Corrigé du sujet « C »

1. Réponse **D.** 2021 (« deux mille vingt et un ») s'écrit avec les cinq mêmes mots que 21002 (« vingt et un mille deux »).

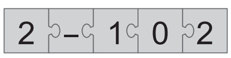
2. Réponse **D.** En remplaçant les deux morceaux gris en bas de la partie droite de la figure par leurs symétriques par rapport au centre du disque, on obtient exactement un demi-disque grisé. L'aire grisée occupe donc 50 % de l'aire du grand disque.

3. Réponse **A.** Pour le Sagittaire, l'axe de la flèche est un axe de symétrie.

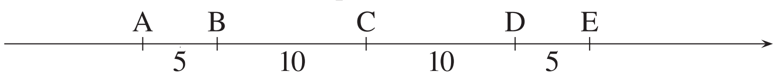
4. Réponse **B.** Le XXI^{e} siècle va du 1er janvier 2001 au 31 décembre 2100. L'année 2100 ne convient pas. Pour que la somme des chiffres d'une année soit 5, il faut donc que les 2 derniers chiffres aient pour somme 3 (les deux premiers étant alors nécessairement 2 et 0). Au total, 4 années conviennent : 2003, 2012, 2021 et 2030.

5. Réponse **A.** Pour les vases B, C et E qui ont un plan de symétrie horizontal, le demi-litre d'eau arrive à mi-hauteur. Pour le D, de plus en plus étroit, l'eau n'atteint pas la mi-hauteur. Et pour le A, de plus en plus large, l'eau dépasse la mi-hauteur.

6. Réponse **A.** Le seul assemblage possible des cinq pièces est celui ci-contre et $2 - 102 = -100$.



7. Réponse **E.** On représente la situation en plaçant des points sur une droite orientée et en marquant les différences de taille en cm :



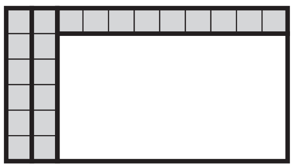
Et l'affirmation correcte est : Adam mesure 30 cm de moins qu'Enzo.

8. Réponse **B.** Sur une roue, les 10 numéros, de 0 à 9, sont dans l'ordre, donc deux numéros diamétralement opposés ont une différence de 5. On a $6-5=\underline{1}$, $3+5=\underline{8}$, $4+5=\underline{9}$ et $8-5=\underline{3}$.
Le code du cadenas est donc <u>1893</u>.

9. Réponse **E.** Tous les petits cubes blancs et noirs sont visibles sur la figure du grand cube et donc tous les cubes invisibles du grand cube sont gris. C'est la figure E qui montre la partie grise. (Remarque : on peut éliminer les figures A, B, C et D en ne regardant que leurs petits carrés gris qui seraient visibles à la surface du grand cube.)

10. Réponse **B.** Les sommes $\overline{YK}+\overline{JZ}$ et $\overline{JZ}+\overline{YK}$ sont égales à $\overline{JK}+\overline{YZ}$ puisque chacune est la somme de J+Y dizaines et K+Z unités. Dans la deuxième opération, on a $\overline{YK}+\overline{JZ}$ unités (deux dernières colonnes) soit 137 unités et $\overline{JZ}+\overline{YK}$ centaines (deux premières colonnes) soit 137 centaines. Et le résultat est donc $137+13700$ soit 13837.

11. Réponse **D.** Les deux premières bandes enlevées, qui totalisent 12 carrés, sont donc de 6 carrées chacune.
Comme on peut enlever alors une bande de 9 carrés c'est que la largeur de la tablette est de 6 carrés et la longueur de $9+2$ soit 11 carrés.
Il reste un rectangle de 9 carrés sur 5 et donc 45 carrés de chocolat.

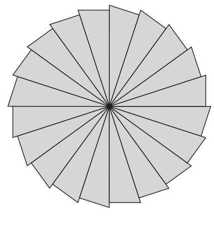


12. Réponse **E.** En rajoutant trois cinquièmes de la contenance, la masse augmente de $740-560$, soit 180 g. Un cinquième de la contenance pèse donc $180\div 3$ soit 60 g. Et la masse du pot est $560-60$, soit 500 g.

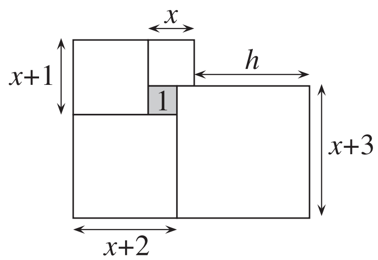
13. Réponse **C.** Le côté du grand carré est 4 cm et celui des petits est 1 cm. Chaque triangle blanc a une hauteur (issue du centre du grand carré) de 2 cm et la base correspondante est de $4-1-1$ soit aussi 2 cm. L'aire d'un triangle blanc (moitié de sa base par sa hauteur) est donc 2 cm^2. L'aire de la partie blanche est donc, en cm^2, $(2\times 4)+(1\times 4)$ soit 12. Et l'aire de la partie grisée est $16-12$, soit 4 cm^2.

14. Réponse **B.** Sans chevauchement, la longueur serait 25×30 cm, soit 750 cm. Les chevauchements font donc perdre $750-690$, soit 60 cm. Il y a 24 chevauchements de même longueur donc cette longueur est :
$\frac{60}{24}=\frac{10}{4}=2{,}5$ (en cm).

15. Réponse **D.** Au centre de l'étoile, l'angle d'un triangle mesure $360 \div 5$, soit 72°.
Le petit angle aigu d'un triangle rectangle mesure donc $90 - 72$, soit 18°. Et $360 \div 18 = 20$.
On juxtapose donc 20 triangles en réunissant les sommets des plus petits angles.



16. Réponse **C.** Le petit carré a pour côté 1. Soit x le côté du carré un peu plus grand. Alors, les côtés des autres carrés sont successivement $x+1$, $x+2$ et $x+3$ (voir figure).
La longueur h est donc telle que $x+h = 1+(x+3)$. D'où $h=4$.



17. Réponse **C.** Si au lieu de parcourir les trois chemins directs (qui ajoutés font un tour), on fait les trois détours (qui ajoutés font au total deux tours), alors on parcourt $1+5+7$ soit 13 km de plus. Le tour fait donc 13 km. Alors, le chemin EL et son détour faisant 13 km, on a $\mathrm{EL}+(\mathrm{EL}+1)=13$, d'où $\mathrm{EL}=6$. On a aussi $\mathrm{EO}+(\mathrm{EO}+5) = 13$ d'où $\mathrm{EO}=4$. Et $\mathrm{LO}+(\mathrm{LO}+7)=13$ d'où $\mathrm{LO}=3$. La longueur du chemin direct le plus court, Lahaut-Omilyeux, est 3 km.

18. Réponse **B.** Le rectangle d'aire Q a un côté égal à 7 (la largeur de la bande) et son autre côté égal à $25-x-7$, soit $18-x$.
Comme $\mathrm{P} = 2\mathrm{Q}$, $x\times 7 = 2\times(18-x)\times 7$. D'où $3x=36$ et $x=12$.

19. Réponse **D.** La cas particulier où Lily a 1 kiwi et Rita a 1 kiwi et 1 poire montre ques les affirmations A, B, C et E ne sont pas toujours vraies. On peut montrer que D est toujours vraie :
• puisqu'il y a deux fois plus de kiwis que de poires, le nombre de kiwis (addition des "kiwis de Rita" et des "*kiwis de Lily*") est égal aux deux tiers du nombre total de fruits ;
• puisque Rita a deux fois plus de fruits que Lily, le nombre de fruits de Rita (addition des "kiwis de Rita" et des "*poires de Rita*") est égal aux deux tiers du nombre total de fruits ;
• et, par comparaison de ces deux égalités, le nombre de "*poires de Rita*" est égal au nombre de "*kiwis de Lily*".

20. Réponse **B.** Le produit $3\times\mathrm{N}$ doit avoir 2 comme chiffre des unités, donc $\mathrm{N}=4$ (et on retient 1). Alors $3\times\mathrm{M}+1$ doit avoir 4 comme chiffre des unités, donc $\mathrm{M}=1$ (et pas de retenue). Ainsi, successivement $\mathrm{L}=7$ puis $\mathrm{K}=5$ (et aussi $\mathrm{J}=8$, le nombre de départ étant donc 285 714).
Remarque :
on peut aussi, x étant le nombre à 5 chiffres s'écrivant JKLMN, résoudre l'équation $(200000+x)\times 3 = 10x+2$ et trouver $x = 85\,714$.

21. Réponse **D.** La pyramide étant posée sur la « quatrième face », il y a :

- une balle D tout en haut de la pyramide ;
- au 3^e^ étage, 3 balles (C, A, B) ;
- au 2^e^ étage, 3 balles aux centres des faces (E, A, C) et 3 sur les arêtes (B, D, E) ;
- sur le pourtour de la base, aux sommets des balles D, A et C, et entre les sommets des balles E, C, B, A, E, B.

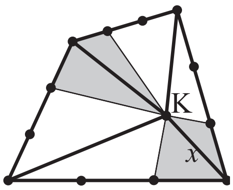
Pour avoir 4 balles de chaque sorte, la dernière balle doit porter un D.

22. Réponse **C.** Si la fraction initiale est $\frac{n}{d}$ et que le nouveau dénominateur est x, on doit avoir $\frac{1{,}4\,n}{x} = \frac{2n}{d}$ et donc $x = 0{,}7\,d$.
Il faut donc diminuer le dénominateur de 30 %.

23. Réponse **A.** Les équipes W et Y doivent se rencontrer mais l'une ou l'autre a déjà un match contre une autre équipe pour chacun des tours 2, 3, 4 et 5. Elles se rencontrent donc au tour 1. Et le 3^{e} match du tour 1 est donc le match X-Z.
En continuant, on trouve la seule manière de choisir les 3 matchs des 5 tours (voir le tableau ici entièrement complété).

1	2	3	4	5
U-V	W-X	U-Y	Y-Z	U-W
W-Y	U-Z	V-X	U-X	V-Z
X-Z	V-Y	W-Z	V-W	X-Y

24. Réponse **B.** La figure ci-contre est la figure donnée où l'on a tracé les segments joignant K aux sommets du grand quadrilatère ; on a aussi colorié le quadrilatère d'aire 6.



Dans chacun des quatre triangles (traits épais) de sommet K et de base un côté du grand quadrilatère, l'aire du triangle blanc vaut 2 fois celle du triangle gris (puisque la base est partagée en trois segments de même longueur).
Et donc pour le grand quadrilatère, réunion des quatre triangles, l'aire blanche est le double de l'aire grise.
D'où, en appelant x l'aire cherchée : $14 + 8 = 2\,(x + 6)$. Et $x = 5$.

25. Réponse **3.** Une addition satisfaisant les conditions est :

$$\begin{array}{r} 555 \\ +\ 555 \\ +\ 555 \\ +\ 353 \\ +\ \ \ 3 \\ \hline 2021 \end{array}$$

Montrons que pour toute addition satisfaisant les conditions, il y a 10 chiffres « 5 » et 3 chiffres « 3 » :
• Pour avoir 1 en unité dans la somme, la seule manière de choisir les unités des 5 nombres additionnés est d'avoir trois « 5 » et deux « 3 ».
• On a alors une retenue de 2 pour les dizaines.
Et la somme des chiffres des dizaines des nombres additionnés doit avoir « 0 » comme unité (pour obtenir le « 2 » de 2021 avec la retenue). Comme il faudra, pour atteindre 2021, plus de trois nombres à trois chiffres, la seule manière d'obtenir ce « 0 » est avec quatre « 5 ».
• Alors, la retenue pour les centaines est 2 et pour totaliser 20 centaines, il faut 18 autres centaines qui s'obtiennent avec trois chiffres « 5 », et un « 3 ».
Au total, il y a 3 chiffres « 3 » dans les cinq nombres (2 en chiffre des unités et 1 en centaines). D'autres additions que celle déjà donnée sont possibles car le résultat est le même en échangeant le 3 et le 5 de deux nombres s'ils sont tous les deux en centaines ou tous les deux en unités.

26. Réponse **7.** Voici la liste des 7 *dromantiers* à cinq chiffres dont la somme des chiffres est 9 : 12321, 12420, 12510, 13410, 14310, 15210 et 24210.
On peut les trouver en examinant les possibilités dans l'ordre croissant ou bien, par exemple, comme ci-dessous…
Un *dromantier* à cinq chiffres, abcde, peut avoir trois formes :
$a<b<c<d>e$; $a<b>c>d>e$; $a<b<c>d>e$.
On cherche ceux pour lesquels $a+b+c+d+e=9$.
• 1^{re} forme. Il n'y en a aucun car la plus petite valeur de a est 1 et alors $a+b+c+d$ vaut au moins $1+2+3+4$ qui dépasse 9.
• 2^{e} forme. On a nécessairement $e=0$ et $d=1$ (sinon $e+d+c+b>9$).
Si alors $a=1$, on peut avoir $c=2$ (et alors $b=5$) ou $c=3$ (et alors $b=4$) et c'est tout.
Si alors $a=2$, on peut avoir $c=2$ (et alors $b=4$) et c'est tout.
Cela fait 3 *dromantiers* : 14310, 15210, 24210.
• 3^{e} forme. On a nécessairement $a=1$.
Si alors $b=2$, on peut avoir $c=3$ (et alors $d=2$ et $e=1$)
ou $c=4$ (et alors $d=2$ et $e=0$)
ou $c=5$ (et alors $d=1$ et $e=0$)
Si alors $b=3$, on doit avoir $c=4$, $d=1$ et $e=0$.
Cela fait 4 *dromantiers* : 12321, 12420, 12510, 13410.