

Thème

1

Ensembles de nombres

Le point sur les nombres

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres **entiers naturels** : $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$.

Dans la liste $p, p+1, \dots, n$ avec $n \geq p$, il y a $(n - p + 1)$ nombres entiers écrits.

- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres **entiers relatifs** : $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$.

- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres **rationnels** : ce sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'un quotient de nombres entiers relatifs $\frac{a}{b}$ avec b non nul, par exemple :

$$\frac{1}{3}; -\frac{3}{4}; \frac{37}{10}; -5; \dots$$

- Les nombres **irrationnels** sont les nombres qui ne sont pas rationnels, par exemple : $\sqrt{2}; \pi; \dots$
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres **réels**, c'est-à-dire des nombres rationnels et des nombres irrationnels.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Les intervalles

a et b désignent des nombres réels.

• Intersection – Réunion

I et J désignent deux intervalles.

L'**intersection** de I et de J , notée $I \cap J$, est l'ensemble des nombres situés dans I **et** dans J .

La **réunion** de I et de J , notée $I \cup J$, est l'ensemble des nombres situés dans I **ou** dans J .

EXEMPLES : $[2; 5[\cap]3; 7] =]3; 5[$; $[2; 5[\cup]3; 7] = [2; 7]$.

• Notations :

$$\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[; \quad \mathbb{R} - \{a\} =]-\infty; a[\cup]a; +\infty[; \quad \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[;$$

$$\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[; \quad \mathbb{R}_- =]-\infty; 0]; \quad \mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[; \quad \mathbb{R}_-^* =]-\infty; 0[.$$

Thème

2

Puissances entières d'un nombre

Puissances de a

a désigne un nombre réel non nul et n un nombre entier naturel.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}} \quad (\text{avec } n \geq 2)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (\text{avec } a \neq 0) \quad \bullet \quad a^0 = 1 \quad (\text{avec } a \neq 0);$$

$$a^1 = a \quad \bullet \quad 0^n = 0 \quad (\text{avec } n \neq 0)$$

Calculs avec des puissances

a, b désignent des nombres réels non nuls et n, p des nombres entiers naturels.

$$\bullet \quad a^n \times a^p = a^{n+p} \quad \bullet \quad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$$

$$\bullet \quad (a^n)^p = a^{n \times p}$$

$$\bullet \quad a^n \times b^n = (a \times b)^n \quad \bullet \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Thème 3 Équations

Equation produit, quotient

• Équation produit

$A \times B = 0$ si, et seulement si, $A = 0$ ou $B = 0$.

EXEMPLE: $(2x + 3)(x - 7) = 0$ si, et seulement si,
 $2x + 3 = 0$ ou $x - 7 = 0$. Soit $x = -\frac{3}{2}$ ou $x = 7$.

• Équation quotient

$\frac{A}{B} = 0$ si, et seulement si, $A = 0$ et $B \neq 0$.

EXEMPLE: $\frac{2x+3}{x-7} = 0$ si, et seulement si,
 $2x + 3 = 0$ et $x - 7 \neq 0$. Soit $x = -\frac{3}{2}$.

Equation du second degré

a, b et c désignent des nombres réels, $a \neq 0$.

• Polynôme de degré deux

Un polynôme de degré deux est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
 $ax^2 + bx + c$ est la **forme développée** de $f(x)$.

$a(x - x_0)^2 + \beta$ où $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(x_0)$ est la **forme canonique** de $f(x)$.

• Équation $ax^2 + bx + c = 0$

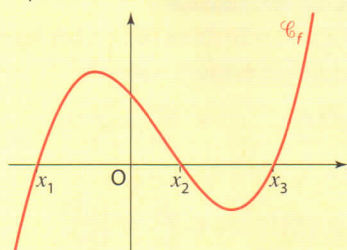
L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a pour **discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$.

	Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$	Forme factorisée de $ax^2 + bx + c$
$\Delta > 0$	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x - x_1)(x - x_2)$
$\Delta = 0$	$x_0 = -\frac{b}{2a}$	$a(x - x_0)^2$
$\Delta < 0$	Pas de solution	Pas de factorisation à mémoriser

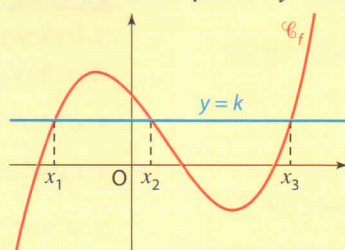
Résolutions graphiques

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont les courbes représentatives des fonctions f et g .
 k est un nombre réel fixé.

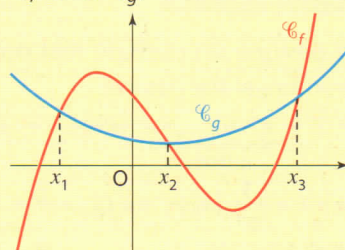
Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des abscisses.



Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y = k$.



Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$.



Thème 4 Inéquations

Ordre et multiplication

a, b, k désignent des nombres réels.

• Si $a > b$ et $k > 0$, alors $ka > kb$

• Si $a > b$ et $k < 0$, alors $ka < kb$

Tableau de signes

Pour étudier le signe d'un produit $A \times B$ ou d'un quotient $\frac{A}{B}$, on dresse un tableau de signes.

EXEMPLE : Étude du signe de $(2x + 4)(-x + 3)$.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$2x + 4$	$-$	0	$+$	$+$
$-x + 3$	$+$	$+$	0	$-$
$(2x + 4)(-x + 3)$	$-$	0	$+$	$-$

$$(2x + 4)(-x + 3) \leq 0$$

lorsque $x \in]-\infty; -2] \cup [3; +\infty[$;

$$(2x + 4)(-x + 3) > 0$$

lorsque $x \in]-2; 3[$.

Signe de $ax^2 + bx + c$

a, b et c désignent des nombres réels, $a \neq 0$. $\Delta = b^2 - 4ac$.

• $\Delta > 0$: on note x_1 et x_2 les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
signe de $ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de $(-a)$	signe de a

• $\Delta = 0$: on note x_0 la solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
signe de $ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de a

• $\Delta < 0$: $ax^2 + bx + c = 0$ est toujours du signe de a .

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $ax^2 + bx + c$	signe de a	

Inéquation $f(x) \geq 0$

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[a; b]$. On peut déterminer les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$:

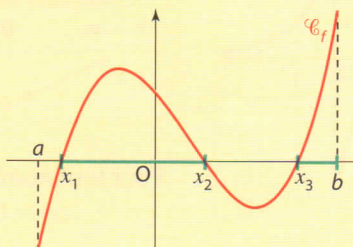
• par le calcul

On utilise les outils usuels : tableau de signes, discriminant, signes connus des fonctions usuelles,...

• par résolution graphique

Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés au-dessus de l'axe des abscisses.

$f(x) \geq 0$ si, et seulement si, $x \in [x_1; x_2] \cup [x_3; b]$.



• par lecture d'un tableau de variation

EXEMPLE :

x	a	x_1	-1	x_2	2	x_3	b
$f(x)$		0	3	0	-1	0	

$f(x) \geq 0$ si, et seulement si, $x \in [x_1; x_2] \cup [x_3; b]$.

Inéquation $f(x) \geq g(x)$

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur $[a; b]$.

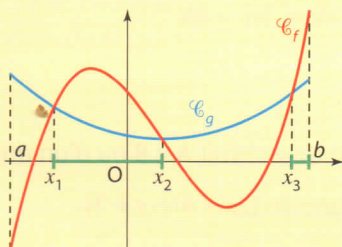
• Par le calcul

L'inéquation $f(x) \geq g(x)$ est équivalente à $f(x) - g(x) \geq 0$. On est alors ramené au cadre précédent.

• Par résolution graphique

Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ sont les abscisses des points pour lesquels $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

On dit que l'on étudie la **position relative des courbes** $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.



$f(x) \geq g(x)$
si, et seulement si,
 $x \in [x_1; x_2] \cup [x_3; b]$.

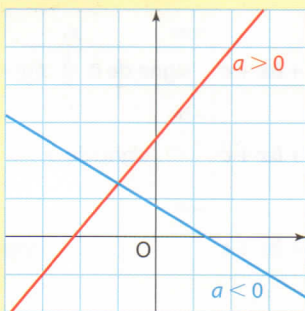
Thème 5 Fonctions de référence

Fonctions affines $f: x \mapsto ax + b$

a et b désignent des nombres réels.

• $a > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
f		



• $a < 0$

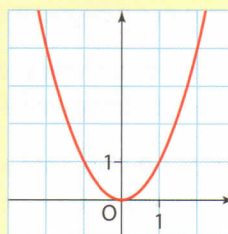
x	$-\infty$	$+\infty$
f		

• $a = 0$

$f: x \mapsto b$ est une fonction constante.

Fonction carré $f: x \mapsto x^2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f		0	



Dans un repère, sa courbe est une **parabole**.

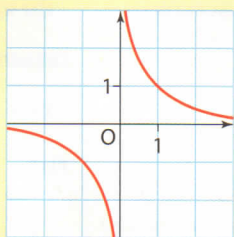
Si $0 \leq a \leq b$, alors $a^2 \leq b^2$.

Si $a \leq b \leq 0$, alors $a^2 \geq b^2$.

Pour tout nombre réel x , $x^2 \geq 0$.

Fonction inverse $f: x \mapsto \frac{1}{x}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f			



Dans un repère, sa courbe est une **hyperbole**.

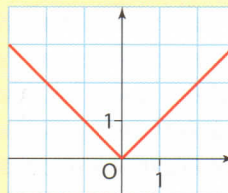
Si $0 < a \leq b$, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

Si $a \leq b < 0$, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

Fonction valeur absolue $f: x \mapsto |x|$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

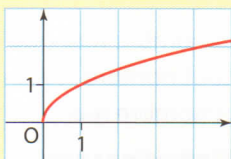
x	$-\infty$	0	$+\infty$
f		0	



Pour tout nombre réel x ,
 $|x| \geq 0$.

Fonction racine carrée $f: x \mapsto \sqrt{x}$

x	0	$+\infty$
f	0	

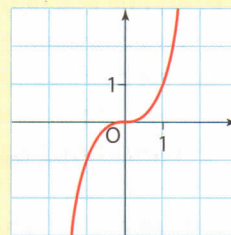


Si $0 \leq a \leq b$, alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Pour tout x de $[0; +\infty[$, $\sqrt{x} \geq 0$.

Fonction cube $f: x \mapsto x^3$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f		0	



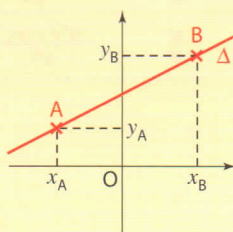
Si $0 \leq a \leq b$, alors :

$$a^3 \leq b^3.$$

Thème 6 Nombre dérivé de f en a

Coefficient directeur d'une droite

Dans un repère, la droite Δ (non parallèle à l'axe des ordonnées), qui passe par les points distincts $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ a pour coefficient directeur :



$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Nombre dérivé en a

f est une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

• Lorsqu'il existe, le **nombre dérivé en a** de la fonction f , noté $f'(a)$, est la limite lorsque h tend vers zéro du taux d'accroissement :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

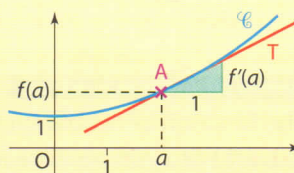
• $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a .

Tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a

Dans un repère, $\mathcal{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f , dérivable en a .

La tangente T à $\mathcal{C}$ au point $A(a; f(a))$ a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



Thème 7 Sens de variation et dérivée

Propriétés

k désigne un nombre réel non nul et u une fonction définie sur un intervalle I .

– Les fonctions u et $u + k$ ont le même sens de variation sur I .

– Les fonctions u et ku ont le même sens de variation sur I lorsque $k > 0$ et elles ont des sens de variation contraires sur I lorsque $k < 0$.

Sens de variation et dérivée

- f est une fonction dérivable sur un intervalle I .

f est croissante sur I si, et seulement si, pour tout nombre réel x de I , $f'(x) \geq 0$;

f est décroissante sur I si, et seulement si, pour tout nombre réel x de I , $f'(x) \leq 0$;

f est constante sur I si, et seulement si, pour tout nombre réel x de I , $f'(x) = 0$.

• Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	f est dérivable sur l'intervalle
k	0	$]-\infty; +\infty[$
x	1	$]-\infty; +\infty[$
x^2	$2x$	$]-\infty; +\infty[$
x^3	$3x^2$	$]-\infty; +\infty[$
x^n $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$	$n.x^{n-1}$	$]-\infty; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0; +\infty[$

• Opérations sur les dérivées

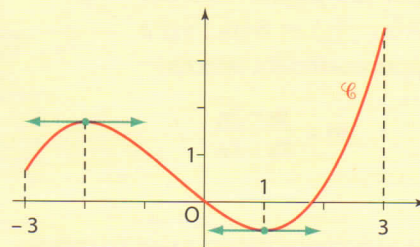
u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k désigne un nombre réel.

Fonction	Fonction dérivée	Fonction dérivable sur
$u + v$	$u' + v'$	I
ku	ku'	I
uv	$u'v + uv'$	I
u^2	$2uu'$	I
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	I lorsque $v(x) \neq 0$ sur I
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	I lorsque $v(x) \neq 0$ sur I

Tableau de variation et courbe

EXEMPLE :

x	-3	-2	1	3			
f'		+	0	-	0	+	
f			1,7		-0,5		3,8
	0,7						



Extremum local d'une fonction

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un nombre réel de I .

- Si $f(x_0)$ est un extremum local de f , alors $f'(x_0) = 0$.

- Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un extremum local de f .

x	x_0
f'	- 0 +
f	↘ $f(x_0)$ ↗

$f(x_0)$ est un minimum local.

x	x_0
f'	+ 0 -
f	↗ $f(x_0)$ ↘

$f(x_0)$ est un maximum local.

Majorant, minorant

f est une fonction définie sur un intervalle I .

- Dire que M est un majorant de f sur I signifie que, pour tout x de I , $f(x) \leq M$.
- Dire que m est un minorant de f sur I signifie que, pour tout x de I , $f(x) \geq m$.
- Dire que f est bornée sur I signifie qu'elle admet un minorant et un majorant sur I .

Sens de variation

- Dire qu'une suite u est croissante signifie que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.
Dire qu'une suite u est décroissante signifie que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.
Dire qu'une suite u est constante signifie que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.

• Étude du sens de variation

1 À l'aide du signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

EXEMPLE : u est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 2u_n^2 + u_n$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2u_n^2 \geq 0$,
donc $u_{n+1} \geq u_n$. La suite u est croissante.

2 À l'aide d'une fonction f , lorsque la suite u est donnée par l'expression $u_n = f(n)$.
Le sens de variation de u est celui de f sur $[0; +\infty[$.

EXEMPLE : u est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n}$.
 f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.
Or f est croissante sur $[0; +\infty[$, donc u est croissante.

3 En comparant le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1, sachant que, pour tout nombre entier naturel n , $u_n > 0$.

EXEMPLE : u est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 0$. Or $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 > 1$,
donc $u_{n+1} > u_n$. La suite u est croissante.

Suite arithmétique

u est une suite arithmétique de raison r .

- Pour tous nombres entiers naturels n et p ,

$$u_{n+1} = u_n + r$$

$$u_n = u_0 + nr$$

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

- Somme de termes consécutifs

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suite géométrique

u est une suite géométrique de raison q .

- Pour tous nombres entiers naturels n et p ,

$$u_{n+1} = qu_n$$

$$u_n = u_0 q^n$$

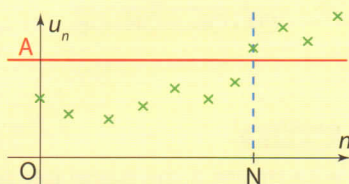
$$u_n = u_p q^{n-p}$$

- Somme de termes consécutifs

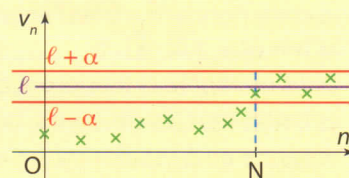
$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ avec } q \neq 1.$$

Limite d'une suite

- Dire qu'une suite u a pour limite $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ signifie que, pour tout nombre réel A , aussi grand que l'on veut, $u_n \geq A$ à partir d'un certain rang N . On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.



- Dire qu'une suite v a pour limite ℓ (avec $\ell \in \mathbb{R}$) lorsque n tend vers $+\infty$ signifie que, pour tout nombre réel $\alpha > 0$, aussi proche de zéro que l'on veut, $v_n \in]\ell - \alpha; \ell + \alpha[$ à partir d'un certain rang N . On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.



Thème 9 Vecteurs du plan

Opérations sur les vecteurs

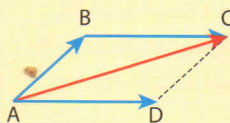
• Addition

Relation de Chasles :

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

Règle du parallélogramme :

$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC} \text{ avec } ABCD \text{ parallélogramme.}$$



• Multiplication par un nombre réel λ non nul

Le point C tel que $\vec{AC} = \lambda \vec{AB}$ vérifie :

- si $\lambda > 0$: $C \in [AB]$ et $AC = \lambda \times AB$
- si $\lambda < 0$: $C \in (AB)$ mais $C \notin [AB]$ et $AC = -\lambda AB$.

Colinéarité de deux vecteurs

- Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie qu'il existe un nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.
- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Vecteurs et coordonnées

λ désigne un nombre réel et, dans un repère du plan, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs : $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$.

- $\vec{u} + \vec{v}(x + x'; y + y')$
- $\lambda \vec{u}(\lambda x; \lambda y)$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $xy' - x'y = 0$.
- Dans un repère orthonormé, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Thème 10 Produit scalaire

Propriétés

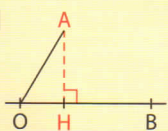
- O, A, B alignés

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \times OB$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -OA \times OB$$

- H est le projeté orthogonal de A sur (OB) :

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OH} \cdot \vec{OB}$$



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2]$$

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs non nuls.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}; \vec{v}).$$

- Dans un repère orthonormé, $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Droites

- La droite Δ qui passe par un point A et de vecteur normal $\vec{n} \neq \vec{0}$ est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Dans un repère orthonormé, si $\vec{n}(a; b)$ avec a et b non tous les deux nuls, une équation cartésienne de Δ est $ax + by + c = 0$ (avec $c \in \mathbb{R}$).

Cercles

- Le cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon R est l'ensemble des points M tels que $IM = R$.

Dans un repère orthonormé, une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est $(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = R^2$.

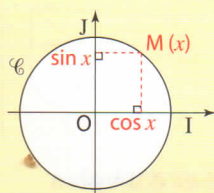
- Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.

Thème 11 Trigonométrie

Cosinus, sinus d'un nombre réel

• $(O; I, J)$ est un repère orthonormé et $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O . M est le point de $\mathcal{C}$ image du nombre réel x .

$\cos x$ est l'abscisse de M , $\sin x$ est l'ordonnée de M .



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

• Pour tout nombre réel x : $-1 \leq \cos x \leq 1$; $-1 \leq \sin x \leq 1$; $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

$$\cos(-x) = \cos x ; \quad \sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \quad \cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x \quad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

Pour tout nombre réel x et pour tout k de $\mathbb{Z}$, $\cos x = \cos(x + k2\pi)$ et $\sin x = \sin(x + k2\pi)$.

• Parmi toutes les mesures d'un angle orienté, la **mesure principale** est la seule qui se trouve dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

Formules d'addition et de duplication

Pour tous nombres réels a et b :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$$

Equations

a désigne un nombre réel.

• $\cos x = \cos a$ si, et seulement si, $x = a + k2\pi$ ou $x = -a + k2\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$).

• $\sin x = \sin a$ si, et seulement si, $x = a + k2\pi$ ou $x = \pi - a + k2\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$).

Thème 12 Géométrie dans l'espace

Quelques règles

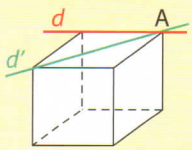
- La perspective cavalière conserve l'alignement, le parallélisme, le milieu. Elle ne conserve pas les angles (et donc l'orthogonalité), les distances.
- Un plan est défini par trois points non alignés.

Positions relatives de droites, de plans

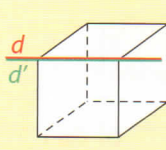
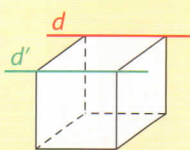
• Positions relatives de deux droites

Coplanaires

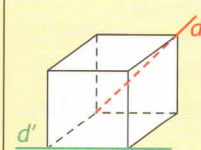
d et d' sécantes



d et d' parallèles



Non coplanaires

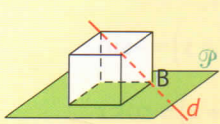


• Droites orthogonales

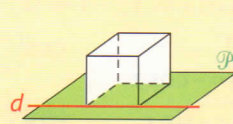
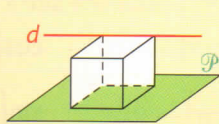
Deux droites d et d' sont orthogonales lorsqu'il existe une droite Δ , parallèle à d , telle que $d' \perp \Delta$.

• Positions relatives d'une droite et d'un plan

d et $\mathcal{P}$ sécants



d et $\mathcal{P}$ parallèles

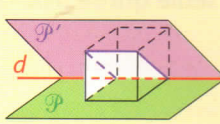


• Droite et plan orthogonaux

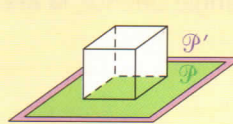
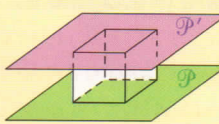
Une droite d et un plan $\mathcal{P}$ sont orthogonaux lorsque d est orthogonale à deux droites sécantes de $\mathcal{P}$.

• Positions relatives de deux plans

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sécants



$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ parallèles



• Plans perpendiculaires

Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires lorsqu'il existe une droite Δ contenue dans $\mathcal{P}'$ et orthogonale à $\mathcal{P}$.

Thème

13

Tableau à double entrée

EXEMPLE : Des individus peuvent présenter différents caractères A ou B et ① ou ②.

	Caractère A	Caractère B	Total
Caractère ①	40	70	110
Caractère ②	20	120	140
Total	60	190	250

La proportion d'individus qui présentent le caractère A :

– sur l'ensemble de la population est $\frac{40}{250}$;

– parmi les individus qui présentent le caractère ① est $\frac{40}{110}$.

Thème

14

Probabilités

Événement

• Un événement A est une partie de l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.

La probabilité de A, notée $P(A)$, est la somme des probabilités des issues qui réalisent A.

• $0 \leq P(A) \leq 1$

• Si E est l'ensemble des issues, alors $P(E) = 1$.

• $P(\emptyset) = 0$

• L'événement $A \cap B$ est constitué des issues qui réalisent l'événement A et l'événement B.

• L'événement $A \cup B$ est constitué des issues qui réalisent l'événement A ou l'événement B.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

• L'événement contraire de A, noté $\bar{A}$, est constitué des issues qui ne réalisent pas A : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Variable aléatoire

• E est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire. Le nombre d'issues de E est fini. Définir une **variable aléatoire** X sur E c'est associer à chaque issue de E un nombre réel.

• Définir la **loi de probabilité de la variable aléatoire X**, c'est associer, à chaque valeur x_i prise par X, la probabilité $p_i = P(X = x_i)$ de l'événement $X = x_i$.

Valeur de x	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

• L'**espérance** de X est le nombre réel :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$

Un jeu est équitable lorsque $E(X) = 0$.

• La **variance** de X est le nombre réel :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i^2 \right) - E^2(X)$$

• **Écart-type** : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Thème

15

Loi binomiale

- Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues : succès S et échec $\bar{S}$.
- On répète n fois, de manière identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès est p . X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée **loi binomiale** de **paramètres n et p** . On la note $\mathcal{B}(n; p)$.
- On représente, à l'aide d'un arbre pondéré, la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Pour tout nombre entier k , $0 \leq k \leq n$, le nombre de chemins réalisant k succès sur les n épreuves est noté $\binom{n}{k}$ (on lit « k parmi n »). Ce nombre est appelé **coefficient binomial**.
- X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p .

Pour tout nombre entier k , $0 \leq k \leq n$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

• $E(X) = np$

• $V(X) = np(1-p)$

• $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Thème

16

Intervalle de fluctuation

En classe de Seconde

p est la proportion du caractère étudié au sein de la population. Pour un échantillon de taille n , l'**intervalle de fluctuation au seuil de 95 %** est :

$$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Cela signifie que, dans un échantillon de taille n , la probabilité que la fréquence du caractère étudié soit dans cet intervalle est 0,95.

En classe de Première

Avec les mêmes données, on note X la variable aléatoire qui compte le nombre d'individus de l'échantillon présentant le caractère étudié.

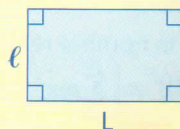
X suit la loi binomiale de paramètres n et p .

L'**intervalle de fluctuation au seuil de 95 %**

est $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n} \right]$ où a et b sont les plus petits nombres entiers tels que $P(X \leq a) > 0,025$ et $P(X \leq b) \geq 0,975$.

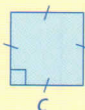
Périmètre - Aires

• Rectangle



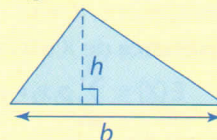
Aire : $L \times l$

• Carré



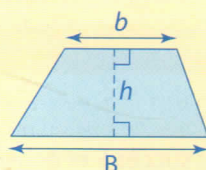
Aire : c^2

• Triangle



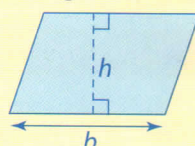
Aire : $\frac{b \times h}{2}$

• Trapèze



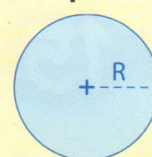
Aire : $\frac{(B + b) \times h}{2}$

• Parallélogramme



Aire : $b \times h$

• Cercle, disque

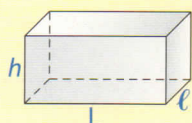


Périmètre : $2\pi R$

Aire : πR^2

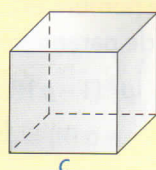
Volumes - Aires latérales

• Parallélépipède rectangle



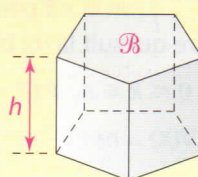
Volume : $L \times l \times h$

• Cube



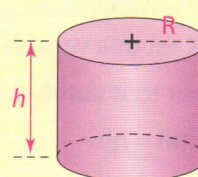
Volume : c^3

• Prisme droit



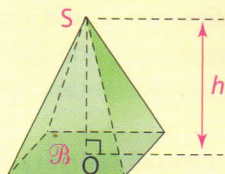
Base d'aire B
et de périmètre p .
Aire latérale : $p \times h$
Volume : $B \times h$

• Cylindre



Aire latérale : $2\pi R h$
Volume : $\pi R^2 h$

• Pyramide



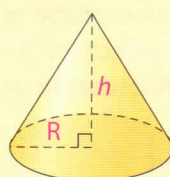
Base d'aire B .

Volume : $\frac{1}{3} B \times h$

Une pyramide est dite régulière de sommet S lorsque :

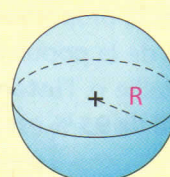
- sa base est un polygone régulier de centre O ;
- sa hauteur est le segment $[SO]$.

• Cône de révolution



Aire de base : $B = \pi R^2$
Volume : $\frac{1}{3} B \times h$

• Sphère, boule



Aire : $4\pi R^2$
Volume : $\frac{4}{3} \pi R^3$