

Rappels

Fractions

• La fraction $\frac{a}{b}$ existe à condition que a et b existent et que b soit différent de 0.

• On peut simplifier une fraction lorsqu'un même nombre non nul est en facteur au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$$

• Pour ajouter ou soustraire des fractions, il faut qu'elles aient le même dénominateur.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} ; \quad \frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c} ; \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

• $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $ad = bc$.

Exemple 1. Somme de fractions

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{3} = \frac{1 \times 3}{7 \times 3} + \frac{2 \times 7}{3 \times 7} = \frac{3+14}{21} = \frac{17}{21}$$

$$\frac{1}{7} + 3 = \frac{1}{7} + \frac{3}{1} = \frac{1}{7} + \frac{3 \times 7}{1 \times 7} = \frac{1+21}{7} = \frac{22}{7}$$

$$\frac{1}{x} + 3 = \frac{1}{x} + \frac{3}{1} = \frac{1}{x} + \frac{3 \times x}{1 \times x} = \frac{1+3x}{x} \text{ pour tout } x \text{ non nul.}$$

Exemple 2. Produit de fractions

$$\frac{1}{14} \times \frac{2}{3} = \frac{1 \times 2}{14 \times 3} = \frac{2}{2 \times 7 \times 3} = \frac{1}{21}$$

Exemple 3. Simplification de fractions

$$\frac{x^2 + 3x}{2 \times x} = \frac{x \times (x+3)}{2 \times x} = \frac{x+3}{2} \text{ en simplifiant par } x.$$

Exemple 4. Transformation d'une égalité de fractions

$$\frac{x}{6} = \frac{7}{11} \text{ équivaut à } x \times 11 = 7 \times 6 \text{ puis } x = \frac{7 \times 6}{11}$$

$$\text{d'où } x = \frac{42}{11}$$

Puissances entières

• Soit n un entier naturel non nul et b un réel quelconque. Alors, b^n désigne le produit de n facteurs égaux à b .

$$b^n = b \times b \times \dots \times b \text{ (} n \text{ facteurs)} ; \quad b^1 = b.$$

• Par convention pour b non nul, on pose : $b^0 = 1$.

• Pour $b \neq 0$, b^{-n} est l'inverse de b^n : $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$.

• Règles : $a^n \times a^p = a^{n+p} ; \quad (a \times b)^n = a^n \times b^n ;$

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \text{ (} a \neq 0 \text{)} ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \text{ (} b \neq 0 \text{)} ;$$

$$(a^n)^p = a^{n \times p}.$$

Exemple 1. Puissances de 10

$$10^2 = 10 \times 10 = 100 ; \quad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0,01.$$

Exemple 2. Puissances de 1

Quel que soit l'entier n , $1^n = 1$.

Exemple 3. Calculs et simplifications

$$\bullet \text{ Produit de puissances : } 3^2 \times 3^5 = 3^{2+5} = 3^7.$$

$$\bullet \text{ Puissance d'un produit : } (3 \times 7)^2 = 3^2 \times 7^2 ; \quad (3 \times x)^2 = 3^2 \times x^2.$$

$$\bullet \text{ Puissance d'un quotient : } \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{3^2}{7^2} = \frac{9}{49}.$$

$$\bullet \text{ Puissance d'une puissance : } (7^2)^3 = 7^{2 \times 3} = 7^6.$$

Intervalle

Inégalités	Notation à l'aide d'un intervalle
$a \leq x \leq b$	$x \in [a; b]$
$a \leq x < b$	$x \in [a; b[$
$a < x \leq b$	$x \in]a; b]$
$a < x < b$	$x \in]a; b[$
$x \geq a$	$x \in [a; +\infty[$
$x > a$	$x \in]a; +\infty[$
$x \leq b$	$x \in]-\infty; b]$
$x < b$	$x \in]-\infty; b[$

L'intervalle est toujours ouvert du côté de $-\infty$ et de $+\infty$: ∞ n'est pas un nombre.

Exemple 1. L'intervalle $[-2; 3]$ est l'ensemble des réels x supérieurs ou égaux à -2 et inférieurs ou égaux à 3 .

Exemple 2. L'intervalle $[-2; 3[$ est l'ensemble des réels x supérieurs ou égaux à -2 et **strictement** inférieurs à 3 .

Exemple 3. L'ensemble des réels strictement positifs est l'intervalle $]0; +\infty[$.

Exemple 4. $3x \geq 6$ équivaut à $x \geq 2$, car on divise chaque membre de l'inégalité par 3 qui est strictement positif.

L'ensemble des réels x tels que $x \geq 2$ est l'intervalle $[2; +\infty[$.

Exemple 5. $-4x < 12$ équivaut à $x > -3$, car on divise chaque membre de l'inégalité par -4 qui est strictement négatif.

L'ensemble des réels x tels que $x > -3$ est l'intervalle $] -3; +\infty[$.

Formes d'une expression algébrique

• Une expression algébrique peut être écrite sous la forme d'une somme : $A + B$, d'un produit : $A \times B$, d'un carré : A^2 ou d'un quotient : $\frac{A}{B}$.

• **Développer** une expression, c'est transformer un produit en une somme.

• **Factoriser** une expression, c'est transformer une somme en un produit.

• Les quatre égalités ci-après peuvent permettre :

- de **développer** : en les utilisant de la gauche vers la droite ;
- de **factoriser** : en les utilisant de la droite vers la gauche.

$$k(a + b) = ka + kb$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Exemple 1. Développer une expression

$$3x(x - 2) = 3x \times x + 3x \times (-2) = 3x^2 - 6x.$$

• L'expression $x - (x - 2)$ est une somme de deux termes : x et $-(x - 2)$, on peut enlever les parenthèses en pensant à changer les signes puis on simplifie : $x - x + 2 = 2$.

Exemple 2. Factoriser une expression

• L'expression $4x^2 + x$ est une somme de deux termes ; dans chacun de ces deux termes apparaît le facteur commun x : $x \times 4x + x \times 1$. On peut alors factoriser cette expression et on obtient : $x(4x + 1)$.

• L'expression $9 - 4x^2$ peut s'écrire $3^2 - (2x)^2$, elle est donc de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = 3$ et $b = 2x$. On peut alors factoriser et on obtient $(3 + 2x)(3 - 2x)$.

Résolution d'une équation dans $\mathbb{R}$

• L'équation $ax + b = 0$ avec a réel non nul, admet une unique solution.

• L'équation $A(x) \times B(x) = 0$, appelée équation produit, équivaut à $A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$.

• Pour $B(x) \neq 0$, l'équation $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$ équivaut à $A(x) = 0$.

• Pour a réel strictement positif, l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

• Pour a réel strictement négatif, l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1. L'équation $2x + 3 = 0$ a pour solution $x = -1,5$.

Exemple 2. L'équation $(2x + 3)(x - 4) = 0$ équivaut à $2x + 3 = 0$ ou $x - 4 = 0$. Cette équation a deux solutions : $-1,5$ et 4 .

Exemple 3. L'équation $x^2 - 25 = 0$ équivaut à $x^2 = 5^2$, elle admet deux solutions : -5 et 5 .

Exemple 4. L'équation $x^2 + 1 = 0$ équivaut à $x^2 = -1$. Puisque -1 est strictement négatif, cette équation n'admet pas de solution.

Exemple 5. L'équation $(1 + x)^2 = 6$ avec $1 + x$ positif équivaut à $1 + x = \sqrt{6}$, donc $x = \sqrt{6} - 1$.

Pourcentages

• Lorsque A est une partie d'un ensemble E , la **proportion** des éléments de A par rapport à E est le quotient $\frac{n_A}{n_E}$ où n_A est le nombre d'éléments de A et n_E le nombre d'éléments de E .

• Lorsqu'une grandeur évolue d'une valeur Q_1 à une valeur Q_2 , le taux d'évolution de Q_1 à Q_2 est égal à $\frac{Q_2 - Q_1}{Q_1}$.

En écrivant $\frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} = \frac{t}{100}$, on dit que $t\%$ est le **pourcentage d'évolution** de Q_1 à Q_2 .

• Augmenter de $t\%$ une quantité, c'est multiplier cette quantité par le nombre $1 + \frac{t}{100}$.

• Diminuer de $t\%$ une quantité, c'est multiplier cette quantité par le nombre $1 - \frac{t}{100}$.

Exemple 1. Associer proportion et pourcentage

Un club possède 179 adhérents dont 95 enfants.

La proportion d'enfants est égale à $\frac{95}{179}$; or $\frac{95}{179} \approx 0,53$, ce club est donc formé de 53 % d'enfants environ.

Exemple 2. Calcul d'un pourcentage d'évolution

Le prix d'un objet passe de 125 euros à 150 euros.

Le taux d'évolution de ce prix est égal à $\frac{150 - 125}{125} = 0,2$.

Or $0,2 = \frac{20}{100}$, le prix de cet objet a donc augmenté de 20 %.

Exemple 3. Calcul d'une valeur après une évolution

Le prix d'un objet est 127 euros. Ce prix augmente de 5 %.

Ce prix est donc multiplié par $1 + \frac{5}{100}$.

Le nouveau prix est $127 \times 1,05 = 133,35$ euros.

Suites

• Une suite (u_n) est **arithmétique** si chaque terme s'obtient à partir du précédent en lui ajoutant une constante r appelée **raison** : $u_{n+1} = u_n + r$.

Si $r > 0$, la suite arithmétique de raison r est croissante.

Si $r < 0$, la suite arithmétique de raison r est décroissante.

• Une suite (u_n) est **géométrique** si chaque terme s'obtient à partir du précédent en le multipliant par une constante q appelée **raison** : $u_{n+1} = q u_n$. Le premier terme étant positif :

– si $q > 1$, la suite géométrique est croissante ;

– si $0 < q < 1$, la suite géométrique est décroissante.

Exemple 1. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $r = 7$. Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n + 7$. En particulier : $u_1 = u_0 + 7 = -3 + 7 = 4$.

(u_n) est croissante car sa raison est positive.

Exemple 2. Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_1 = 4$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$.

En particulier : $v_2 = \frac{1}{2} v_1 = \frac{1}{2} \times 4 = 2$.

Comme $v_1 > 0$ et $0 < q < 1$, (v_n) est décroissante.

Les fonctions de référence

Fonction affine

• Une fonction affine f est définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme $f(x) = mx + p$.

• **Sens de variation :**

– si $m > 0$, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$;

– si $m < 0$, la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

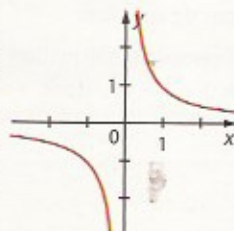
• **Représentation graphique :** c'est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Fonction inverse

• La fonction inverse est la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

• **Sens de variation :** la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

• **Représentation graphique :** c'est une hyperbole qui est symétrique par rapport à l'origine du repère.

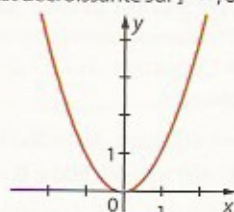


Fonction carré

• La fonction carré est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

• **Sens de variation :** la fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et croissante sur $]0; +\infty[$.

• **Représentation graphique :** c'est une parabole qui est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et qui admet comme sommet le point O, origine du repère.



Fonctions polynômes

• Une **fonction polynôme du second degré** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont trois réels avec $a \neq 0$.

La **représentation graphique** d'une fonction polynôme du second degré est une parabole qui admet un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées. Cette parabole est « tournée vers le haut » si $a > 0$ et « tournée vers le bas » si $a < 0$.

• Une **fonction polynôme du troisième degré** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a , b , c et d sont quatre réels avec $a \neq 0$.

Dérivation

Fonction dérivée des fonctions polynômes

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, alors $f'(x) = 2ax + b$.

Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, alors $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Dérivée et sens de variation

Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de la fonction f :

– si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I , alors f est croissante sur I ;

– si $f'(x) \leq 0$ pour tout x de I , alors f est décroissante sur I .

Exemple 1.

Pour $f(x) = -2x^2 + x - 1$, on a $a = -2$, $b = 1$ et $c = -1$ donc $f'(x) = 2 \times (-2) \times x + 1 = -4x + 1$.

Exemple 2. Pour $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, on a $g'(x) = 3x^2 - 6x$.

Ce polynôme du second degré admet deux racines : 0 et 2.

Il est du signe de a , donc positif, sauf entre ses racines.

x	-2	0	2	3	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
g	-19	1	-3	1	

Signe d'une expression

Pour trouver le signe d'une expression, on commence par reconnaître la **forme**, puis on applique la **règle adaptée** après avoir éventuellement transformé l'expression.

• Si une expression se présente sous la forme d'une **somme de termes tous positifs**, alors cette somme est positive.

• Si une expression est de la forme $ax + b$ ($a \neq 0$), on recherche la valeur x_0 qui annule $ax + b$ puis on applique la règle ci-dessous :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
signe de $ax + b$	signe de $(-a)$	0	signe de a

• Si une expression est un **produit**, on recherche le signe de chacun des facteurs de ce produit et on applique la règle des signes d'un produit.

En général, on construit un **tableau de signes**.

• Si une expression est un **quotient**, on commence par rechercher les valeurs interdites, c'est-à-dire les valeurs qui annulent le dénominateur, puis on recherche le signe du numérateur et du dénominateur.

On conclut en s'aidant d'un tableau de signes.

Exemple 1. $x^2 + 7$ est une somme de deux termes positifs, donc $x^2 + 7$ est positive pour tout réel x .

Exemple 2. $-3x + 30$ est de la forme $ax + b$ avec $a = -3$ et $b = 30$. Cette expression s'annule pour $x = 10$.

L'expression $-3x + 30$ est du signe de a , c'est-à-dire négative (puisque $a = -3$), après s'être annulée.

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	10	$+\infty$
$-3x + 30$		+	-

Exemple 3. L'expression $-3x^2 + 30x$ se factorise sous la forme $x(-3x + 30)$. On construit le tableau de signes en introduisant une ligne pour le signe de x et une ligne pour le signe de $-3x + 30$:

x	$-\infty$	0	10	$+\infty$
x		-	+	+
$-3x + 30$		+	+	-
$x(-3x + 30)$		-	+	-

Exemple 4. Le quotient $\frac{x}{-3x + 30}$ existe pour tout $x \neq 10$.

On trace comme ci-dessus un tableau dont la dernière ligne donne le signe du quotient. Dans cette ligne, on trace une double barre verticale pour indiquer que cette expression n'existe pas pour $x = 10$.

Second degré

• L'expression $ax^2 + bx + c$ avec a non nul est appelée **polynôme du second degré**.

• Le **discriminant** de ce polynôme est le réel noté Δ , égal à $b^2 - 4ac$.

• **Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$**

Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solution.

• **Détermination du signe de $ax^2 + bx + c$**

Si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur de l'intervalle de ses racines x_1 et x_2 , et du signe de $-a$ à l'intérieur de l'intervalle de ses racines.

Si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour tout réel x et s'annule pour $x = \frac{-b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour tout réel x et ne s'annule jamais.

Exemple 1. Résolution d'équation

• Soit $f(x) = -5x^2 + 13x + 6$.

$$\Delta = 13^2 - 4 \times (-5) \times 6 = 289 = 17^2.$$

L'équation $f(x) = 0$ admet donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-13 - 17}{2 \times (-5)} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{-13 + 17}{2 \times (-5)} = -0,4.$$

• Soit $g(x) = 4x^2 - 32x + 64$.

$$\Delta = (-32)^2 - 4 \times 4 \times 64 = 0.$$

L'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution :

$$x_0 = \frac{-(-32)}{2 \times 4} = 4.$$

• Soit $h(x) = 3x^2 - 5x + 6$.

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 6 = -47.$$

Comme $\Delta < 0$, l'équation $h(x) = 0$ n'admet pas de solution.

Exemple 2. Détermination de signe

• Le polynôme $f(x) = -5x^2 + 13x + 6$ admet deux racines 3 et -0,4 (voir exemple 1). a est égal à -5, donc le tableau de signes de cette expression est :

x	$-\infty$	-0,4	3	$+\infty$
$-5x^2 + 13x + 6$	signe de a			signe de a
	-	+	+	-

• Le polynôme $h(x) = 3x^2 - 5x + 6$ a un discriminant strictement négatif. Il est donc du signe de a , c'est-à-dire strictement positif pour tout réel x .

Équations de droite

• Dans le plan muni d'un repère $(O; I, J)$, toute droite admet une équation de la forme $y = mx + p$ (pour les droites non parallèles à l'axe des ordonnées) ou $x = c$ (pour les droites parallèles à l'axe des ordonnées).

m est le **coefficient directeur** de la droite.

p est l'**ordonnée à l'origine** de la droite.

• Deux droites d'équation $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles si et seulement si $m = m'$ (c'est-à-dire si elles ont le même coefficient directeur).

Exemple 1. Soit (d) la droite d'équation $y = -2x + 1$.

Le coefficient directeur de cette droite est -2 .

Le point de cette droite (d) qui a pour abscisse 4 est le point de coordonnées $(4; -7)$ car $(-2) \times 4 + 1 = -7$.

Exemple 2. Soit $A(1; -2)$ et $m = 7$.

La droite (T) passant par A et de coefficient directeur 7 a une équation de la forme $y = 7x + p$.

Le point A appartient à cette droite donc ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite : $-2 = 7 \times 1 + p$ donc $-2 - 7 = p$ donc $p = -9$.

La droite (T) a pour équation : $y = 7x - 9$.

Statistiques

• La **moyenne** d'une série statistique est le réel :

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_p x_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p} \text{ où } n_i \text{ est l'effectif de la valeur } x_i.$$

• L'**écart-type**, noté σ , donne une information sur la dispersion des valeurs de la série.

• La calculatrice permet d'obtenir la moyenne et l'écart-type.

• La **médiane** partage la série ordonnée en deux parties.

Il s'agit de la valeur centrale si l'effectif est impair et de la demi-somme des deux valeurs centrales si l'effectif est pair.

Exemple. On a fait une enquête auprès de 233 personnes pour connaître le nombre d'heures passées par jour devant l'ordinateur. Voici le tableau donnant les résultats obtenus :

Nombre d'heures	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de personnes	4	17	37	63	72	30	10

La calculatrice donne des valeurs approchées de la moyenne : $\bar{x} \approx 3,34$ à 0,01 près et de l'écart-type : $\sigma \approx 1,30$ à 0,01 près.

L'effectif (233) est impair, donc la médiane est la valeur centrale, c'est-à-dire la 117^e valeur.

On obtient la 117^e valeur en utilisant les effectifs cumulés : la médiane est 3.

Probabilités

• Une **expérience aléatoire** est une expérience qu'on peut répéter un grand nombre de fois et pour laquelle on ne peut pas prévoir le résultat à l'avance : elle conduit à des **issues**.

• À chaque issue, on associe un nombre compris entre 0 et 1, appelé **probabilité de l'issue**.

• Un **événement** est un ensemble d'issues.

• La **probabilité** d'un événement A , notée $P(A)$, est la somme des probabilités p_i des issues qui le constituent. On a $0 \leq P(A) \leq 1$.

• L'**événement contraire** de A est l'ensemble des issues qui ne réalisent pas A . Cet événement est noté $\bar{A}$, on a $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

• Pour deux événements quelconques A et B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

• Lorsque les événements A et B sont incompatibles :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

• Faire l'hypothèse d'équiprobabilité, c'est supposer que toutes les issues ont la même probabilité. Dans ce cas, s'il y a n issues, la probabilité de chaque issue est $\frac{1}{n}$.

• Sous l'hypothèse d'**équiprobabilité**, on a :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Exemple

Une urne contient 3 boules noires et 7 boules blanches indiscernables au toucher.

Les boules noires sont numérotées « 1 », « 2 » et « 3 ».

Les boules blanches sont toutes numérotées « 4 ».

On tire au hasard une boule de cette urne.

On appelle A l'événement « obtenir une boule numérotée 1 », B l'événement « obtenir une boule blanche » et C l'événement « obtenir une boule de numéro au moins égal à 2 ».

Les boules étant indiscernables au toucher, on peut faire l'hypothèse d'équiprobabilité : chaque boule a une probabilité de $\frac{1}{10}$ d'être tirée.

On a $P(A) = \frac{1}{10} = 0,1$ car l'urne contient une seule boule numérotée « 1 » sur les dix boules.

On a $P(B) = \frac{7}{10} = 0,7$ car l'urne contient 7 boules blanches.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ car les événements A et B sont incompatibles, donc $P(A \cup B) = 0,8$.

On peut aussi compter les issues favorables à $A \cup B$: il y en a 8, d'où $P(A \cup B) = 0,8$.

L'événement contraire de C est l'événement « obtenir une boule de numéro strictement inférieur à 2 », donc l'événement contraire de C est A : $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - P(A) = 1 - 0,1 = 0,9$.

Loi binomiale

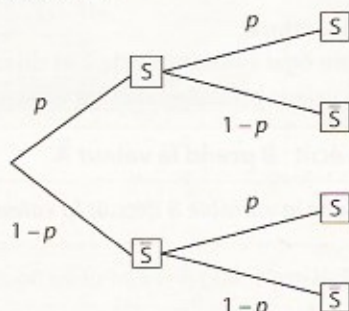
• Lorsqu'une expérience E comporte deux issues, on appelle souvent l'une des issues « succès » (on la note S) et l'autre issue « échec », (on la note $\bar{S}$).

On note p la probabilité de S .

• Un **schéma de Bernoulli** est constitué de n répétitions de la même expérience E à deux issues dans des conditions indépendantes ; les paramètres de ce schéma de Bernoulli sont n (nombre de répétitions) et p (probabilité du succès).

On peut représenter le schéma de Bernoulli par un **arbre pondéré** en notant sur chacune des branches la probabilité de l'issue associée

Arbre dans le cas où $n = 2$



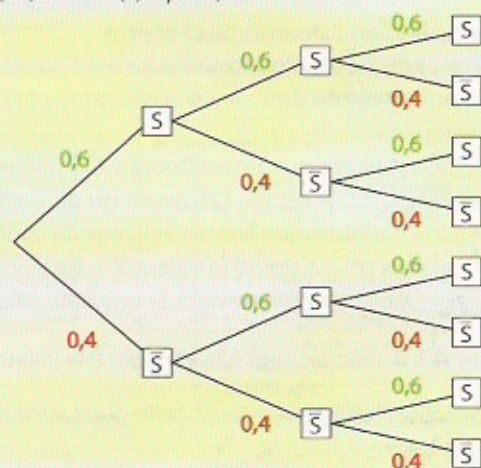
• En appelant X le nombre de succès obtenu lors d'un schéma de Bernoulli, l'événement « on obtient k succès » est noté $\{X = k\}$. Dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p , la variable aléatoire X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p .

• On calcule $P(X = k)$ et $P(X \leq k)$ avec la calculatrice ou à l'aide d'un arbre lorsque n est égal à 2 ou à 3.

• L'**espérance mathématique** de la loi binomiale de paramètres n et p est $E(X) = np$.

Exemple 1. Un sac contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire successivement et avec remise trois boules du sac. Lors de chaque tirage, on appelle succès « obtenir une boule blanche ».

La probabilité d'obtenir une boule blanche lors d'un tirage est $\frac{3}{5} = 0,6$; donc $P(S) = p = 0,6$.



On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,6$.

L'événement « $X = 2$ » est formé des trois listes de résultats $SS\bar{S}$, $S\bar{S}S$ et $\bar{S}SS$.

$$P(X = 2) = 3 \times 0,6 \times 0,6 \times 0,4 = 0,432.$$

$P(X \leq 2) = 0,784$ est obtenu avec la calculatrice.

On peut aussi écrire $P(X \leq 2) = 1 - P(X > 2) = 1 - P(X = 3)$.

$$\text{Donc } P(X \leq 2) = 1 - 0,6^3 = 0,784.$$

Exemple 2. L'espérance mathématique de la variable aléatoire X définie précédemment est $E(X) = 3 \times 0,6 = 1,8$.

Échantillonnage

Intervalle de fluctuation

L'intervalle de fluctuation au **seuil de 95 %** de la fréquence d'un caractère correspondant à la réalisation, sur un échantillon aléatoire de taille n , d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale est $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n} \right]$, où a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0,025$ et b le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.

Exemple

Un laboratoire pharmaceutique annonce qu'un médicament sauve 40 % des patients atteints d'une maladie rare. On cherche l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des patients atteints de cette maladie dans des échantillons de taille 100.

Soit X le nombre de malades sauvés par ce médicament dans un échantillon de malades aléatoire et assimilé à un tirage avec remise de taille 100 : X suit la loi binomiale de paramètres 100 et 0,4.

À l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$P(X \leq 30) \approx 0,0248 \text{ et } P(X \leq 31) \approx 0,0398, \text{ d'où } a = 31 ;$$

$$P(X \leq 49) \approx 0,9729 \text{ et } P(X \leq 50) \approx 0,9832, \text{ donc } b = 50.$$

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des patients malades dans les échantillons de taille 100 est $[0,31 ; 0,5]$.