03 décembre 2010, TPE_607_**Archimède**

C'est un blog sérieux utilisé comme support pour le dossier final d'un TPE de 2 élèves 1ere S (607) du Lycée Felix-Faure à Beauvais. Rodrigue LEBAILLY ;Romain LEROY

Approximation du nombre π

Explication de la méthode d'Archimède

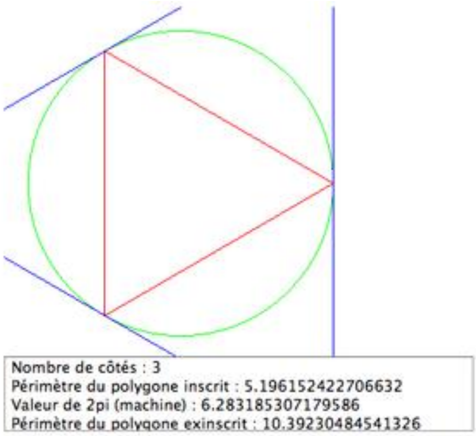
La méthode de base pour trouver la valeur de π consiste à construire deux polygones réguliers ayant le même nombre de côtés, en traçant le premier à l'intérieur du cercle : un polygone inscrit et l'autre étant tracé autour du même cercle : un polygone exinscrit.

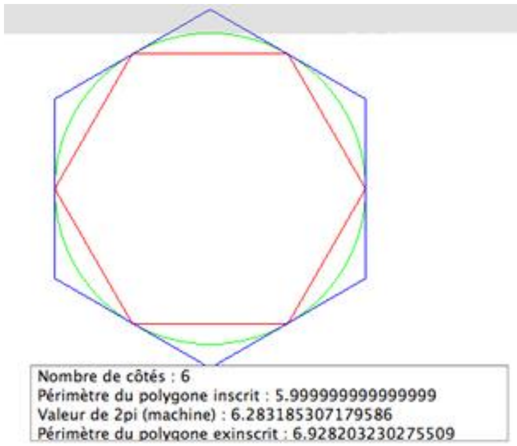
Le fait de diviser les périmètres des 2 polygones par le diamètre du cercle permet d'obtenir un encadrement de la valeur du nombre π, qui devient plus précis en augmentant le nombre de côtés de polygones. Avec des hexagones (polygone à 6 côtés), on détermine une valeur de π comprise entre 3 et 3,47.

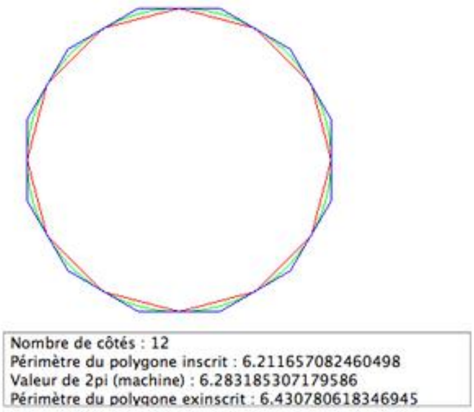
Au bout de de la 5ème étape, il obtient un polygone régulier à 96 côtés,il montre sa formule d'approximation de Pi :

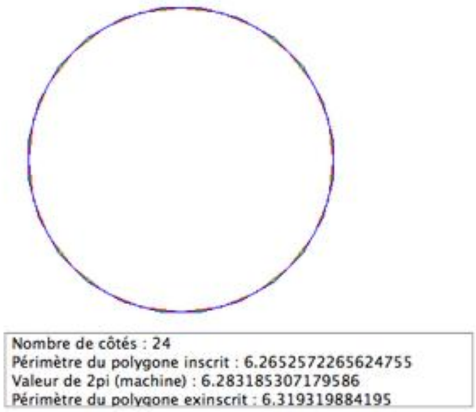
$$\frac{223}{71} \leq \pi \leq \frac{22}{7}$$

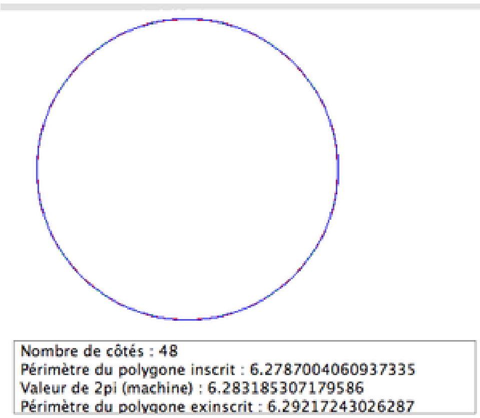
Figures obtenues sur java

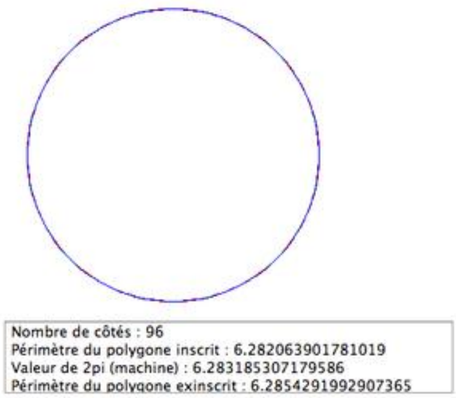












Détail de la méthode :

π=périmètre du polygone/diamètre du cercle vu que le polygone va tendre à devenir un cercle on aura la formule du périmètre d'un cercle suivante : périmètre du cercle $C = 2\pi r = \pi d$

On a la formule : $$\frac{\textit{périmètre du polygone inscrit}}{\textit{diamètre du cercle}} \leq \pi \leq \frac{\textit{périmètre du polygone exinscrit}}{\textit{diamètre du cercle}}$$

Pour obtenir les périmètres des polygones,on trace les médiatrices de tous les côtés de la figure qui se coupent en le centre du cercle, on peut calculer les demi côtés de chaque polygone avec ces formules :

L'angle $\widehat{A}$ correspond à l'angle du sommet de chaque triangle ayant pour sommet le centre du cercle, on peut le calculer car dans un cercle dont l'angle correspondant est 360°, on a n triangles pour n côtés, ces triangles sont divisés en 2, on a donc 2 fois plus de triangles donc 2 fois plus de sommets, pour avoir la valeur de cet angle il suffit de diviser 360 par 2n ce qui revient à 180 par n.

$$A = \frac{360}{2\text{n}} = \frac{180}{n}$$

$$\sin(A) = \frac{\textit{opposé}}{\textit{hypoténuse}} = \frac{\textit{opposé}}{\textit{rayon}} = \frac{\textit{opposé}}{1} = \textit{opposé} = \textit{demi} - \textit{côté du polygone inscrit}$$

$$\tan(A) = \frac{\textit{opposé}}{\textit{adjacent}} = \frac{\textit{opposé}}{\textit{rayon}} = \frac{\textit{opposé}}{1} = \textit{opposé} = \textit{demi} - \textit{côté du polygone exinscrit}$$

Donc pour avoir le périmètre d'un polygone il suffit de multiplier chaque longueur d'un demi-côté par 2 par le nombre de côtés du polygone.

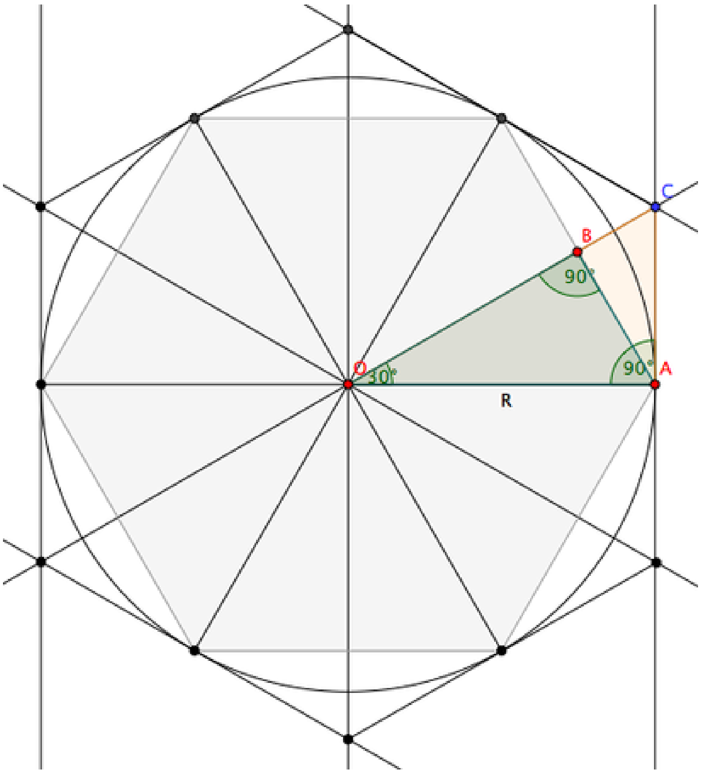
En considérant n le nombre de côtés des polygones et le rayon du cercle égal à 1 :

U_n => périmètre du polygone inscrit V_n => périmètre du polygone exinscrit

$$U_n = 2\text{n} \sin\left(\frac{180}{n}\right) V_n = 2\text{n} \tan\left(\frac{180}{n}\right)$$

Par exemple : prenons la 2ème étape avec des hexagones :

Figure tracée sur GeoGebra :

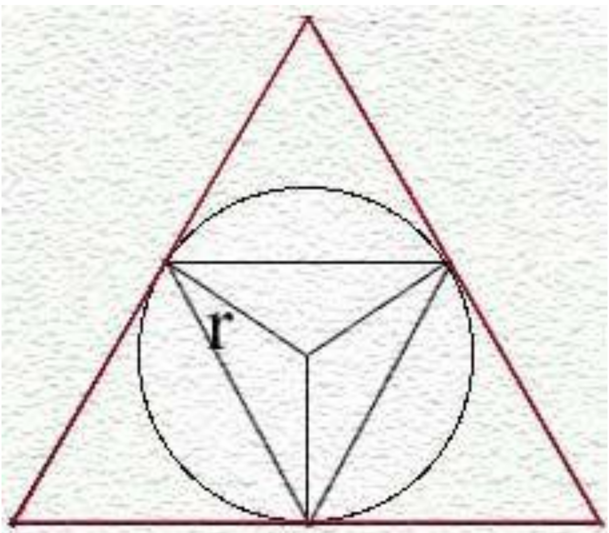


L'angle $\widehat{A}$ vaut 30° car (30=180/6) et le rayon R vaut 1.

$$\sin(30)=\frac{AB}{AO}=\frac{AB}{R}=\frac{AB}{1}=AB \quad \tan(30)=\frac{AC}{AO}=\frac{AC}{R}=\frac{AC}{1}=AC$$

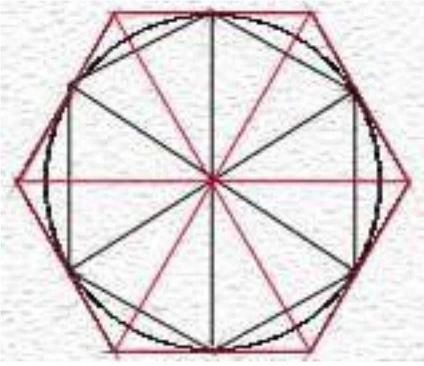
Voici, les calculs d'encadrement de π pour les étapes 1,2,3 et 6.

Pour la première étape, en considérant un cercle de rayon 1, on a des triangles inscrits et exinscrits :



=> $\frac{3\text{x}2\,sin60}{2}\leq\pi\leq\frac{3\text{x}2\,tan60}{2}$ => 2,598 ≤ π ≤ 5,196

Pour la deuxième étape, le cercle de rayon 1 est encadré par des hexagones :


=> $\frac{6x2\,sin30}{2} \leq \pi \leq \frac{6x2\,tan30}{2}$ => $3 \leq \pi \leq 3{,}464$

Pour la troisième étape, le cercle de rayon est encadré par des polygones réguliers à 12 côtés (ou dodécagones) :


=> $\frac{12x2\,sin15}{2} \leq \pi \leq \frac{6x2\,tan15}{2}$ => $3{,}106 \leq \pi \leq 3{,}215$

Archimède a déterminé l'approximation du nombre Pi avec un encadrement du cercle par des polygones réguliers à 96 côtés donc, si l'on applique la formule pour trouver l'encadrement de Pi, on trouve :

=> $\frac{96x2\sin(\frac{180}{96})}{2} \leq \pi \leq \frac{96x2\tan(\frac{180}{96})}{2}$ => $3{,}141 \leq \pi \leq 3{,}143$

Ce qui équivaut à l'approximation suivante :

$$\frac{223}{71} \leq \pi \leq \frac{22}{7}$$