Le triangle rectangle

I Réciproque du théorème de Pythagore

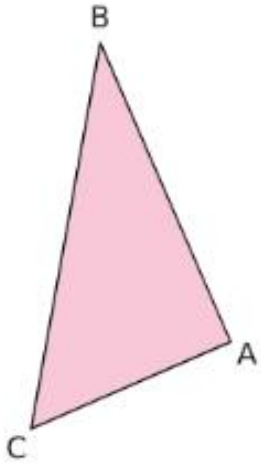
Théorème **Si,** dans un triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, **alors** ce triangle est un triangle rectangle.

Exemple :

ABC est un triangle tel que $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Donc, d'après le théorème réciproque de Pythagore, on en déduit que le triangle ABC est **rectangle en A**.

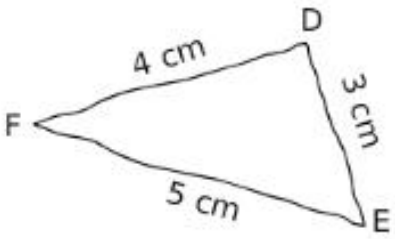
Son hypoténuse est le plus grand côté, c'est-à-dire [BC].



II Démontrer qu'un triangle est rectangle

Exemple : DEF est un triangle tel que DE = 3 cm, EF = 5 cm et DF = 4 cm.
Démontre que DEF est un triangle rectangle.

Figure à main levée :



Le plus grand côté est [EF], donc on calcule séparément :

EF^2	et	$DE^2 + DF^2$
$= 5^2$		$= 3^2 + 4^2$
$= 25$		$= 9 + 16$
		$= 25$

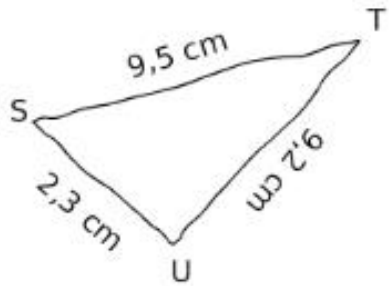
$EF^2 = DE^2 + DF^2$

On en déduit donc, d'après le théorème réciproque de Pythagore, que le triangle DEF est rectangle en D.

III Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle

Exemple : STU est un triangle tel que ST = 9,5 cm, TU = 9,2 cm et SU = 2,3 cm.
Démontre que STU n'est pas un triangle rectangle.

Figure à main levée :



Le plus grand côté est [ST] donc on calcule séparément :

ST^2	et	$TU^2 + SU^2$
$= 9{,}5^2$		$= 9{,}2^2 + 2{,}3^2$
$= 90{,}25$		$= 84{,}64 + 5{,}29$
		$= 89{,}93$

$ST^2 \neq TU^2 + SU^2$

On en déduit donc que le triangle STU n'est pas rectangle.

Les puissances

COURS 1

Puissance d'exposant positif

a. Définition

DÉFINITION

a est un nombre et n est un entier naturel supérieur à 1.

$\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}} = a^n$

a^n est le produit de n facteurs tous égaux à a.

a^n se lit : « a puissance n » ou « a exposant n ».

Par nécessité, $a^0 = 1$ (avec $a \neq 0$) et $a^1 = a$.

Exemples

- $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^4$
- $(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = (-2)^5$
- $8^4 = 8 \times 8 \times 8 \times 8 = 4\,096$
- $\left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{125}{27}$
- $(-12)^1 = -12$
- $536^0 = 1$

Les mathématiciens utilisent cette notation lorsque des multiplications sont répétées pour ne pas compter le nombre de a.

b. Priorités opératoires

RÈGLE DE PRIORITÉ

Dans une expression sans parenthèses, on effectue en priorité les puissances, puis les multiplications et divisions et, en dernier, les additions et soustractions.

Exemples

$A = 32 + (-2)^4 : 4$	$B = 32 - 2^4 : 4$
$A = 32 + 16 : 4$	$B = 32 - 16 : 4$
$A = 32 + 4$	$B = 32 - 4$
$A = 36$	$B = 28$

c. Puissances de 10

Les puissances de 10 sont des cas particuliers des puissances. L'écriture décimale s'obtient alors très facilement.

NOTATION

$10^n = \underbrace{100\ldots0}_{n \text{ zéros}}$

Exemples

$10^6 = 1\,000\,000$ (un million).

$10^9 = 1\,000\,000\,000$ (un milliard).

d. Quelques propriétés

$a^3 \times a^2 = a \times a \times a \times a \times a$

$a^3 \times a^2 = a^5$

On observe que : $a^3 \times a^2 = a^{3+2}$

$(a^3)^2 = a^3 \times a^3$

$(a^3)^2 = a^6$

On observe que : $(a^3)^2 = a^{3\times2}$

$(a \times b)^3 = (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b)$

$(a \times b)^3 = a \times a \times a \times b \times b \times b$

$(a \times b)^3 = a^3 \times b^3$

On observe que : $(a \times b)^3 = a^3 \times b^3$

$\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a}$

$\frac{a^5}{a^2} = a \times a \times a$

$\frac{a^5}{a^2} = a^3$

On observe que : $\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2}$

COURS 2

Puissance d'exposant négatif

a. Définition

DÉFINITION

a est un nombre non nul et n est un entier.

a^{-n} est l'inverse de a^n : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Exemples

$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ $\qquad \frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 5^{-2}$

4^{-1} est l'inverse de 4. L'écriture décimale de 4^{-1} est 0,25.

b. Puissance de 10

NOTATION

$10^{-n} = \underbrace{0{,}00\ldots01}_{n \text{ zéros}}$

Exemples

$10^{-3} = 0{,}001$ (un millième).

$10^{-1} = 0{,}1$ (un dixième).

COURS 3

Règles de calcul sur les puissances

PROPRIÉTÉ

Pour tous les nombres a, b, n et p, les égalités suivantes sont toujours vraies :

- $a^n \times a^p = a^{n+p}$
- $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$ avec $a \neq 0$
- $(a^n)^p = a^{n \times p}$
- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ avec $b \neq 0$

Exemples

- $7^{-4} \times 7^9 = 7^{-4+9}$ donc $7^{-4} \times 7^9 = 7^5$
- $\frac{10^2}{10^{-5}} = 10^{2-(-5)}$ donc $\frac{10^2}{10^{-5}} = 10^7$
- $(0{,}2^3)^{-2} = 0{,}2^{3\times(-2)}$ donc $(0{,}2^3)^{-2} = 0{,}2^{-6}$
- $(4 \times x)^2 = 4^2 \times x^2$ donc $(4 \times x)^2 = 16x^2$
- $\left(\frac{-2}{3}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{3^3}$ donc $\left(\frac{-2}{3}\right)^3 = \frac{-8}{27}$

COURS 4

Notation scientifique

Un nombre a plusieurs écritures (voir chapitre 8 page 138). La notation scientifique permet de lire et comprendre plus simplement les très grands et très petits nombres.

Cette notation utilise les puissances de 10.

DÉFINITION

Un nombre décimal est écrit avec la **notation scientifique** lorsqu'il est présenté sous la forme du produit d'un nombre décimal compris entre 1 et 10 (exclu) par une puissance de 10.

Exemples

$45\,000 = 4{,}5 \times 10^4$

$0{,}000075 = 7{,}5 \times 10^{-5}$

253 milliards s'écrit $2{,}53 \times 10^{11}$

8 millionièmes s'écrit 8×10^{-6}

Remarques La notation scientifique permet aussi de donner un ordre de grandeur d'un nombre. Par exemple : $5\,165\,000\,000 = 5{,}165 \times 10^9$ donc un ordre de grandeur de ce nombre est 5×10^9, c'est-à-dire cinq milliards. Les scientifiques utilisent des exposants multiples de 3 pour lire facilement les millions, milliards...