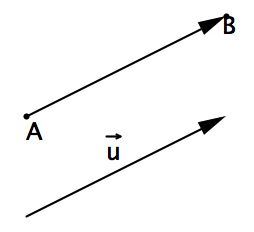
1er S **PRODUIT SCALAIRE – 1er partie**

***Objectifs****: Définitions et propriétés du produit scalaire de deux vecteurs. (Projection orthogonale, analytiquement, avec les normes, avec les norme et un angle).*

*Démonstration du théorème de la médiane.*

1. **Définitions**



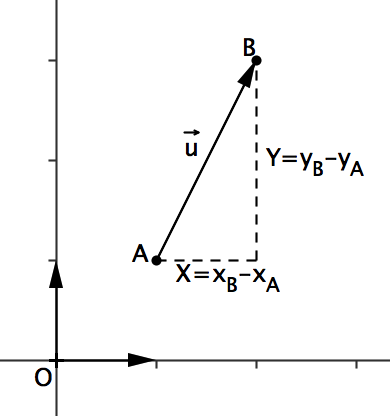
1. **Norme d’un vecteur**

Soit un vecteur et A, B deux points tels que



• On appelle NORME de , et on note , la LONGUEUR AB. Ainsi



• Une norme est un nombre positif ou nul.

• Si dans un repère orthonormé alors



Avec on a

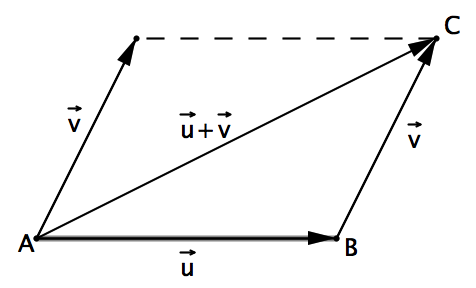


• Pour tout *k* ∈ on a



• Un vecteur tel que =1 s’appelle VECTEUR UNITAIRE



• En général , il n’y a égalité que dans certains cas.



Mais on a toujours



(On a toujours mais en longueur AC≤ AB+BC)



Exercice 1 : Calculer la norme pour (-2 ; 3).



1. **Produit scalaire**

Ce n’est pas une multiplication …

Soient et deux vecteurs non nuls du plan.

**Le produit scalaire de par**  noté  **.**  est le nombre défini par l’une ou l’autre des égalités ci-dessous  (ROC) :

|  |  |
| --- | --- |
| Définition :  ou | |
| **Théorème 1 :**  *où ( x ; y ) et ( x’ ; y’ ) sont les coordonnées respectives de et de dans* ***un repère orthonormal*** *quelconque .* | |
| **Théorème 2 :**  O H A  B  H O A  B    ***Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit de leurs normes par le cosinus de l’angle qu’ils forment.*** | *où O , A et B sont trois points du plan tels que*  *= et = .*    *H est le projeté orthogonal de B sur la droite ( OA )* |
| **Théorème 3 :** |

**Conventions :** Si = ou = , on pose . = 0 .



Exercice 2 : ABCD un parallélogramme tel que AB = 4, BC = 3 et AC = 6

Déterminer les produits scalaires : 

Exercice 3 : ABCD un rectangle tel que AB = 4 cm et BC = 3 cm. Calculer .



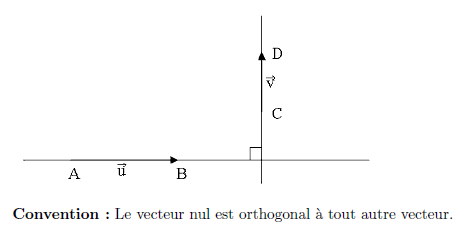
Exercice 4 : Soient A ( 2 ; 3 ) , B ( -1 ; 4 ) et C ( -2 ; 1 ) trois points du plan muni d’un repère orthonormal. Déterminer  puis .

Exercice 5 : Soit ABC un triangle équilatéral tel que AB = 3 (dans l’unité de longueur choisie ) .

Les points E, F et D sont les milieux des côtés [AB] , [BC] et [AC]. Déterminer  , et .

Exercice 6 : Dans un plan muni d’un repère orthonormal, on considère A(0 ; 4) ; B(-2 ; 0) et C(3 ; 0 ).

1. Calculer le produit scalaire 
2. En déduire 
3. Donnez une mesure en degré de l’angle , arrondie au dixième
4. **Propriétés**

******

1. **Orthogonalité**

*Rappel: Soient et deux vecteurs, dire que = et = sont orthogonaux signifie que (AB) et (CD) sont perpendiculaires*

|  |  |
| --- | --- |
| ***Théorème :***  *Dans un repère orthonormal, on considère les deux vecteursnon nuls ( x ; y ) et*  *( x’ ; y’ ) ;*  ***et  sont orthogonaux*** *si et seulement si* ***leur produit scalaire est nul***  ***.  = 0  x x’ + y y’ = 0***  *Par convention, on dit que le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur* |  |

Exercice 7 : Les vecteurs suivants sont-ils orthogonaux ?

a) **(2 ; 5 ) et ****** (-10 ; 4) b) **(-2 ; -5 ) et ****** (-10 ; 4)

1. ****Projeté orthogonaux.**

* *On a considéré les vecteurs de même origine, mais le résultat est*

*le même dans les autres cas :*

*Si C’ et D’ sont les projetés orthogonaux de C et D*

*sur ( AB ) , alors : *

*Si A’ et B’ sont les projetés orthogonaux de A et B*

*sur ( CD ) , alors : *

***Pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs, on peut remplacer l’un deux par son projeté orthogonal sur la droite qui porte l’autre.***

1. **Opérations**

|  |  |
| --- | --- |
| *Soit , et trois vecteurs du plan et k un réel, on a :*  ***Symétrie :***  *. = .*  ***Bilinéarité :***  *. ( + ) = . + . ( k ) . = k ( . )*  *( + ) . = . + . . ( k ) = k ( . )* |  |

***conséquence :*** *a . b = ab . ( où a et b sont deux réels quelconques )*

* *Ainsi , après quelques calculs, on retrouve* ***des produits scalaires remarquables*** *( bien familiers )*

*( + ) ² = ² + ² + 2 .  ; ( – ) ² = ² + ² – 2 . et*

*( + ) ( – ) = ² – ²*

Exercice 8 : ABCD est un rectangle et Γ est le demi-cercle de diamètre [DC] et de centre O. La perpendiculaire en O à [DC] coupe Γ en E. On a AB = 4 et AD = 2.

a) Calculer les produits scalaires  et .

b) Calculer en utilisant la relation de Chasles.

1. **Théorème de la médiane**

**Théorème** (ROC) : Soit un triangle ABC et I le milieu de [BC], on a AB ² + AC ² = 2 AI ² +

Exercice 9 : ABCD un parallélogramme AB =15, BC = 13 et AC = 14. Calculer DB.