**PROBABILITÉS CONDITIONNELLE S**

1. **PROBABILITÉS CONDITIONNELLES**
   1. **Utilisation d'arbres pondérés dans le calcul des probabilités**

Exercice 1 :

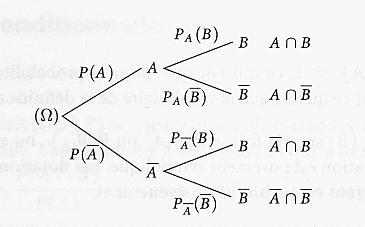
On dispose d'une urne dans laquelle figurent 3 jetons blancs et 2 jetons noirs.

1. On tire un jeton, on note sa couleur et on le remet dans l'urne, puis, on tire un deuxième jeton.

Quelle est la probabilité que l'on obtienne 2 jetons de même couleur ?

1. Même question mais on ne remet pas le premier jeton dans l'urne.

**Règles de construction et d’utilisation d’arbres pondérés dans le calcul de probabilités** :

* Dans un arbre pondéré, la probabilité d'un événement correspondant à un chemin est le produit des probabilités inscrites sur chaque branche de ce chemin.
* La probabilité d'un événement associé à plusieurs trajets complets est la somme des probabilités de ces trajets.
* La somme des probabilités des branches partant d'un même nœud est égale à 1.
* La probabilité de la branche A-------B est la probabilité de B sachant que l'événement A est réalisé. On note cette probabilité PA(B)et on l'appelle probabilité de B sachant A.
  1. **Définition** :

p désigne une probabilité sur un univers fini Ω. A et B étant deux événements de Ω, A étant de probabilité non nulle. On appelle **probabilité conditionnelle** de l’événement B sachant que A est réalisé le réel noté .

Remarque : Si A et B sont tous deux de probabilité non nulle, alors les probabilités conditionnelles p(A/B) et p(B/A) sont toutes les deux définies et on a : p(A B) = p(A/B)p(B)= p(B/A)p(A).

* 1. **Formule des probabilités totales**

**Partition de l’univers**

**Définition** : Soient Ω un univers associé à une expérience aléatoire et n un entier supérieur ou égal à 2.

Les événements A1, A2, …, An forment une **partition** de Ω si les trois conditions suivantes sont réalisées :

- pour tout i {1 ; 2 ;… ; n}, Ai 0.

- pour tous i et j (avec i j) de {1 ;2 ;…n}, Ai Aj = .

- A1 A2 … An = Ω.

**Formule des probabilités totales**

Soient A1, A2,…, An une **partition** de l’univers Ω constituée d’événements de probabilités non nulles et B un événement quelconque contenu dans Ω.

## Alors **: p(B) = p(B A1) + p(B A2) + … + p(B An)**

## Ou **p(B) =** .

Démonstration : B = (B A1) (B A2) … (B An),

Les événements (B A1), (B A2), …, (B An) sont 2 à 2 incompatibles donc la probabilité de leur réunion est la somme de chacun d’entre eux , on en déduit :

p(B) = p(B A1) + p(B A2) + … + p(B An).

et en utilisant que, pour tout i de {1 ; 2 ; … ; n}, p(B Ai)=pAi(B) p(Ai), on obtient :

p(B)= 

Exercice 2 :

Un stock de paquets de biscuits a été acheté par le gérant d'un supermarché.

2% des paquets ne sont pas intacts.

60% des paquets présentant un défaut ont au moins un biscuit cassé

95% des paquets dont l'emballage est intact ne contiennent aucun biscuit cassé.

Un client achète un paquet de biscuit. Calculer la probabilité des événements suivants :

I : " l'emballage est intact "

A : " l'emballage n'est pas intact mais aucun biscuit n'est cassé "

B : " l'emballage est intact et aucun biscuit n'est cassé "

D : " aucun biscuit n'est cassé "

Exercice 3 : On donne le tableau suivant :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | internes | externes | total |
| seconde | 45 |  | 65 |
| première | 10 | 70 |  |
| total |  |  |  |

On choisit une personne au hasard. Soit B l'événement : "la personne choisie est interne" et Y l'événement : "la personne choisie est en seconde ".

Déterminer : P(Y), P(B∩Y) et PY( B).

Déterminer : P(), P(B∩) et PB()

Exercice 4 : Avec un dé cubique équilibré, quelle est la probabilité d’obtenir le 6 sachant que le résultat est pair ?

##### II. INDÉPENDANCE

* + 1. **Événements indépendants**

**Définition** : A et B sont 2 événements de probabilité non nulle.

* A et B sont **indépendants** lorsque la réalisation de l’un ne change pas la réalisation de l’autre.
* A et B sont **indépendants** si et seulement si p(A/B) = p(A) ou p(B/A) = p(B).

**Théorème :** Deux événements A et B de probabilité non nulle sont **indépendants** si et seulement si ils vérifient une des trois conditions :p(A/B) = p(A) ou p(B/A) = p(B) ou p( A B) = p(A)p(B).

Démonstration :- Par définition, les deux premières sont équivalentes

- si p(A/B) = p(A) comme p(A B) = p(A/B)p(B) alors p(A B) = p(A) p(B)

- si p(A B) = p(A)p(B), comme p(B) 0,  = p(A) c’est-à-dire pB(A) = p(A)

Remarque **:** Ne pas confondre événements **indépendants** et événements **incompatibles.**

* 2 événements A et B sont **indépendants** si p(A B)= p(A)p(B)
* 2 événements A et B sont **incompatibles** si A B= .

La notion d’indépendance dépend de la probabilité sur l’univers, celle d’incompatibilité est purement ensembliste.

Exercice 5 :

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32. Soit A l'événement : " on obtient un roi " , B l'événement : " on obtient un cœur " ,

C l'événement : " on obtient un roi rouge ".Les événements A et B sont-ils indépendants ? B et C sont-ils indépendants ?

* + 1. **Indépendance de deux variables aléatoires**

**Définition** : X et Y sont deux variables définies sur l’univers Ω d’une expérience aléatoire ; X prend les valeurs x1, x2, …, xn et Y prend les valeurs y1, y2, …, yq.

# **Définir la loi du couple** (X, Y) c’est donner la probabilité pi,j de chaque événement [(X = xi) et (Y = yj)].

**Définition** :Dire que deux variables X et Y sont **indépendantes** signifie que, **quels** **que soient i et j**, les événements (X = xi) et (Y = yj) sont indépendants.

Remarque : Les événements (X = xi) et (Y = yj) sont indépendants si :

p[(X = xi) et (Y = yj)] = p(X = xi) p(Y = yj)

**III. MODÉLISATION D’EXPÉRIENCES INDÉPENDANTES**

1. **Expériences indépendantes : exemple**
2. **Expériences aléatoires indépendantes**

On considère les trois expériences aléatoires suivantes :

* A : on lance une pièce de monnaie équilibrée, les issues de l’expérience sont notées P et F.
* B : on tire au hasard un jeton dans une urne qui contient trois jetons portant les lettres a, b et c.
* C : on tire au hasard une boule dans une urne qui contient une boule rouge et une boule verte : on note R et V les deux issues.

Lorsqu’on effectue successivement les trois expériences A, B, C l’issue de l’une quelconque des trois expériences ne dépend pas de l’issue des autres expériences.

1. **Probabilité d’une liste de résultats**

Les issues de la nouvelle expérience qui consiste à effectuer successivement A, B , C sont des listes d’issues telles que ( P ; c ; V)

Dresser un arbre donnant toutes les listes de résultats possibles.

**On modélise cette expérience aléatoire en définissant la probabilité d’une liste d’issues comme le produit des probabilités de chaque issue.**

Si, pour chaque expérience A, B et C, on retient le modèle de la loi équirépartie, quelle est la probabilité d’une liste quelconque d’issues ?

**2. Répétition d’expériences identiques indépendantes : exemple**

1. **Définition de l’expérience**

On tire au hasard une boule dans une urne contenant 2 boules Noires, 4 boules Rouges et 3 boules Jaunes. Les issues de cette expérience sont notées N, R et J.

Définir la loi de probabilité.

1. **Répétition de l’expérience**

On répète une fois l’expérience précédente. La première boule tirée est remise dans l’urne avant le deuxième tirage ainsi les deux expériences sont identiques et indépendantes.

1. **Calcul de probabilités :**

Dresser un arbre donnant tous les résultats possibles de ces deux tirages.

On considère l’événement S : « obtenir une boule rouge exactement ». Calculer p(S).

1. **Propriété**

**Lors de la répétition d’expériences aléatoires indépendantes, la probabilité d’une liste de résultats est égale au produit des probabilités de chacun de ces résultats.**