Suite définie par une moyenne arithmétique

Énoncé

On considère la suite (u_n) définie pour tout n entier strictement positif par :

$$u_n = \frac{6}{n}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Partie expérimentale

1. À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, représenter graphiquement les 50 premiers termes de la suite (u_n).
2. Émettre une conjecture sur le type de fonction f telle que, pour tout n entier entre 1 et 50, on ait : $u_n = f(n)$.

> Appeler l'examinateur pour exposer votre conjecture et proposer une méthode pour la préciser.

3. Mettre en place la stratégie validée par l'examinateur et déterminer précisément la fonction f.

> Appeler l'examinateur, lui indiquer la fonction f trouvée et lui proposer une méthode pour résoudre la question 4.

Démonstrations

4. (a) Démontrer que pour tout n entier naturel non nul, on a $u_n = f(n)$ où f est la fonction validée par l'examinateur.

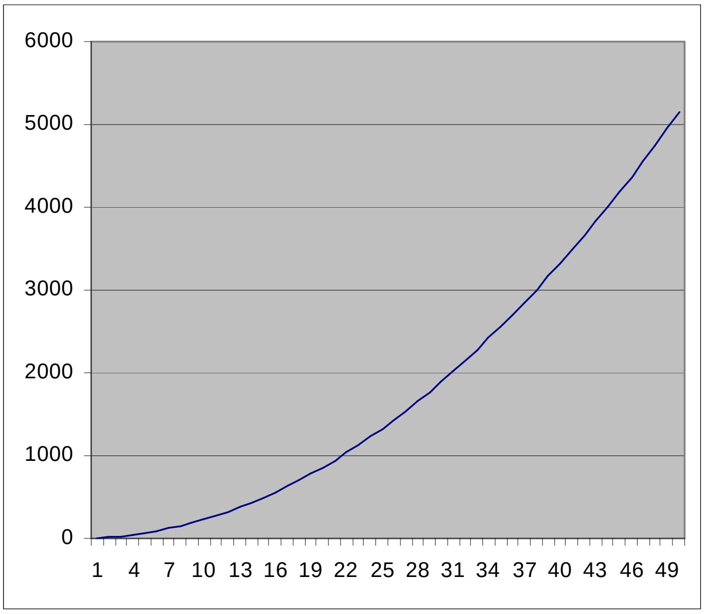
   (b) En déduire une formule simple donnant la somme des carrés des n premiers entiers strictement positifs.

Production demandée

- Des explications orales et à l'écran pour les questions 1 à 3 ;
- Les réponses argumentées à la question 4.

Quelques commentaires personnels sur la fiche 044 2008
« Suite définie par une moyenne arithmétique »

n	n^2	sommes	u_n
0	0		
1	1	1	6
2	4	5	15
3	9	14	28
4	16	30	45
5	25	55	66
6	36	91	91
7	49	140	120
8	64	204	153
9	81	285	190
10	100	385	231
11	121	506	276



Sujet assez complexe.

On doit utiliser les références absolues (ou cumuler avec la case précédente), caractériser correctement le nuage de points ; puis, formuler correctement le polynôme du second degré $f(x) = 2x^2+3x+1$ (plusieurs stratégies sont possibles) .

Enfin apporter la preuve, par exemple, avec un raisonnement par récurrence.

- propriété vraie pour n=1 car f(1) = 2+3+1
- si vraie pour p, alors $u_{p+1} = \frac{6}{p+1}(1^2+..+p^2+(p+1)^2) = \frac{6}{p+1} u_p \frac{p}{6} + 6(p+1)$

$$= \frac{p}{p+1}(2p^2+3p+1)+6(p+1) = \frac{2p^3+9p^2+13p+6}{p+1} = 2(p+1)^2+3(p+1)+1$$

Cela fait beaucoup, mais l'épreuve tend à évaluer plutôt les démarches que la rédaction complètement rédigée.

Conclusion : excellent exercice d'entraînement de 1°S ou Tale

26/09/2008 Claude Poulin Nouméa