Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie 16 novembre 2016

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x+3)\mathrm{e}^{-x}.$$

a. $f'(x) = 2\mathrm{e}^{-x}$	**b.** $f'(x) = -2\mathrm{e}^{-x}$
c. $f'(x) = (2x+5)\mathrm{e}^{-x}$	**d.** $f'(x) = (-2x-1)\mathrm{e}^{-x}$

2. On considère le nombre $I = \displaystyle\int_0^1 \left(2\mathrm{e}^{2x}+3\right)\,\mathrm{d}x$.

a. $I = \mathrm{e}^2+3$	**b.** $I = \mathrm{e}^2+2$
c. $I = 2\mathrm{e}^2+3$	**d.** $I = 2\mathrm{e}^2-2$

3. On considère g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 5\mathrm{e}^{x}+3.$$

La tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 0 passe par le point :

a. A$(1\,;\,5\mathrm{e}+3)$	**b.** B$(-1\,;\,5)$
c. C$(1\,;\,13)$	**d.** D$(0\,;\,3)$

4. On considère h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = x^3-6x+3.$$

a. h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$	**b.** h est concave sur $[0\,;\,+\infty[$
c. h est concave sur $\mathbb{R}$	**d.** h est convexe sur $[0\,;\,+\infty[$

*

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 350 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0,5u_n + 100.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par :
   $w_n = u_n - 200$.
   a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n,
   $$u_n = 200 + 150 \times 0,5^n.$$

Partie B

Une commune propose aux enfants d'adhérer à une association sportive. Au premier septembre 2015 le nombre d'enfants inscrits dans cette association est 500 dont 350 filles.
Les statistiques relatives aux années précédentes nous amènent, pour l'évolution du nombre d'adhérents lors des prochaines années à la modélisation suivante :

— Chaque année, la moitié des filles inscrites l'année précédente ne renouvellent pas leur inscription ; par ailleurs l'association accueille chaque année 100 nouvelles filles.
— D'une année à l'autre, le nombre de garçons inscrits à l'association augmente de 10 %.

1. On représente l'évolution du nombre de filles inscrites dans ce club par une suite (F_n) où F_n désigne le nombre de filles adhérentes à l'association en l'année $2015 + n$. On a donc $F_0 = 350$.
   Pour tout entier naturel n, exprimer F_{n+1} en fonction de F_n.
2. On représente l'évolution du nombre de garçons inscrits dans ce club par une suite (G_n), où G_n désigne le nombre de garçons adhérents à l'association l'année $2015 + n$.
   a. Pour tout entier naturel n, exprimer G_n en fonction de n.
   b. À partir de quelle année le club comptera-t-il plus de 300 garçons ?
3. On souhaite savoir à partir de quelle année le nombre de garçons, dans cette association, va dépasser celui des filles. On propose l'algorithme suivant :

Initialisation
Affecter à n la valeur 0
Affecter à G la valeur 150
Affecter à F la valeur 350
Traitement

Tant que $G \leqslant F$
  n prend la valeur $n + 1$
  G prend la valeur $1,1G$
  F prend la valeur $0,5F + 100$
Fin tant que

Sortie Afficher le nombre n

a. Recopier et compléter autant que nécessaire le tableau suivant. Les résultats seront arrondis à l'unité.

Valeur de n	0	1	...	
Valeur de G	150	...	...	
Valeur de F	350			
Condition $G \leqslant F$	vrai	...		

b. En déduire l'affichage obtenu, puis répondre au problème posé.

*

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pierre prend des cours de natation ; il effectue plusieurs plongeons.
Lorsque Pierre réussit un plongeon, il prend confiance en lui et la probabilité qu'il réussisse le plongeon suivant est de 0,7.
Par contre, lorsqu'il ne réussit pas un plongeon, la probabilité qu'il réussisse le plongeon suivant est égale à 0,2.
On suppose que Pierre a réussi son premier plongeon.
L'état « plongeon réussi » est noté R.
L'état « plongeon non réussi » est noté $\overline{R}$.
Pour tout entier naturel $n > 1$, la probabilité que Pierre réussisse son n-ième plongeon est notée a_n, tandis que la probabilité que Pierre ne réussisse pas son n-ième plongeon est notée b_n.
La matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ donne l'état probabiliste du système lors du n-ième plongeon.

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets R et $\overline{R}$.
2. Donner la matrice de transition M associée à ce graphe, les sommets R et $\overline{R}$ étant classés dans cet ordre.
3. Justifier que $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Avec la calculatrice, déterminer la probabilité que Pierre réussisse son quatrième plongeon.
5. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,2$.
6. Lorsque la probabilité que Pierre réussisse son plongeon devient inférieure ou égale à 0,41, le maître-nageur demande à Pierre de faire une pause.
   On cherche alors à déterminer au bout de combien d'essais Pierre arrête sa série de plongeons.
   On cherche donc à déterminer le plus petit entier naturel $n \geqslant 1$ tel que
   $a_n \leqslant 0,41$.
   Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il permette de répondre à la question posée.

```
Initialisation
Affecter à N la valeur 1
A prend la valeur 1

Traitement
Tant que .........
    N prend la valeur .......
    A prend la valeur .......
Fin Tant que

Sortie
Afficher .........
```

7. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par

$$u_n = a_n - 0,4.$$

   a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_n = 0,6 \times 0,5^{n-1} + 0,4$.
   c. Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel n tel que $a_n \leqslant 0,41$.
   d. Au bout de combien d'essais Pierre arrête-t-il sa série de plongeons ?

*

EXERCICE 3 **5 points**

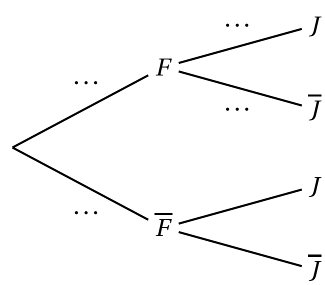
Commun à tous les candidats

Les trois parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Une enquête révèle que dans un lycée, 67 % des élèves jouent régulièrement aux jeux vidéo.
On sait de plus que 57 % des élèves du lycée sont des filles et que, parmi elles, 49 % jouent régulièrement aux jeux vidéo.
On choisit au hasard un élève du lycée.
On note : J l'évènement : « l'élève joue régulièrement aux jeux vidéo », et F l'évènement : « l'élève est une fille ».

1. Recopier l'arbre ci-dessous et remplacer chacun des quatre pointillés par la probabilité correspondante.



2. Calculer la probabilité que l'élève soit une fille qui joue régulièrement aux jeux vidéo.
3. Montrer que la probabilité que l'élève soit un garçon qui joue régulièrement aux jeux vidéo est égale à 0,390 7.
4. Calculer la probabilité que l'élève joue régulièrement aux jeux vidéo sachant que c'est un garçon. Arrondir au dix-millième.

Partie B

Zoé, grande amatrice de jeux vidéo, souhaite s'offrir une tablette numérique pour son anniversaire.
Elle pense commander sur un site web marchand une tablette de marque Alpha.
Elle s'inquiète quant à l'autonomie de sa tablette en mode veille.
On admet que l'on peut modéliser la durée d'autonomie de chaque tablette de marque Alpha en mode veille par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 120$ et d'écart-type $\sigma = 10$.
La durée X est exprimée en heures.

1. Déterminer la probabilité que la tablette numérique ait en mode veille une autonomie strictement inférieure à 5 jours.

2. Déterminer $p(96 \leqslant X \leqslant 144)$. Arrondir le résultat au millième.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Le service des ventes de la société Alpha affirme que 91 % des utilisateurs de cette tablette sont satisfaits de leur achat.
Le gestionnaire du site marchand organise une enquête afin de vérifier cette affirmation.
Il interroge au hasard 150 clients ayant acheté cette tablette; parmi eux, 130 se déclarent satisfaits de leur acquisition.
Peut-on valider l'affirmation du service des ventes de la société? Justifier.*

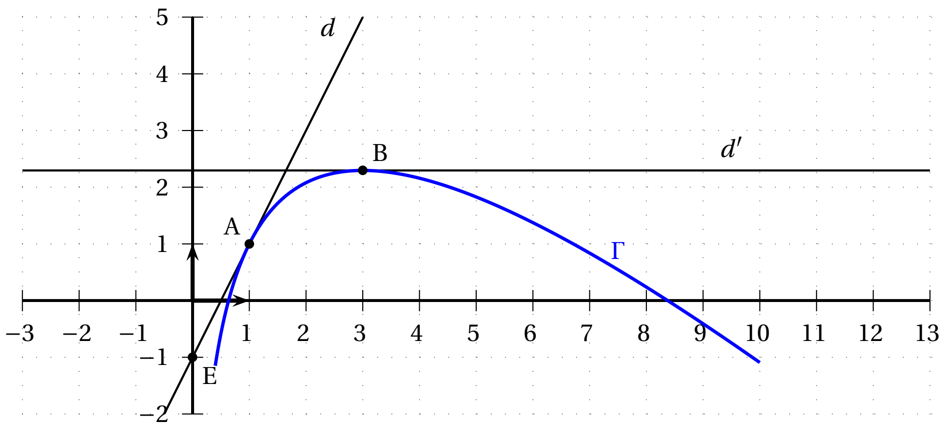
EXERCICE 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A *et* B *peuvent être traitées de façon indépendante*

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0{,}5 ; 10]$ par :

$$f(x) = ax + 2 + b\ln(x)$$

où a et b sont deux nombres réels.
On note f' la fonction dérivée de f.
Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :
- la courbe représentative Γ de la fonction f ;
- la droite d tangente à la courbe Γ au point A de coordonnées $(1 ; 1)$;
- la droite d' tangente à la courbe Γ au point B d'abscisse 3.



On sait de plus que :
- la tangente au point A passe par le point E de coordonnées $(0 ; -1)$.
- la tangente au point B est parallèle à l'axe des abscisses.

Partie A

1. Donner par lecture graphique la valeur de $f'(1)$, puis celle de $f'(3)$.

2. Calculer $f'(x)$.

3. En déduire les valeurs des nombres a et b.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0,5\,;\,10]$ par :

$$f(x) = -x + 2 + 3\ln(x).$$

1. Montrer que pour x dans $[0,5\,;\,10]$,

$$f'(x) = \frac{-x+3}{x}.$$

2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe Γ au point A d'abscisse 1.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0,5\,;\,10]$, puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.
4. Montrer que sur l'intervalle $[0,5\,;\,3]$ l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution. Donner une valeur approchée de cette solution arrondie au centième.
5. Un logiciel de calcul formel nous donne le résultat suivant :

1	*intégrer* $[3\ln(x) - x + 2]$
	$3x\ln(x) - x - \frac{x^2}{2}$

Calculer, en unités d'aire, l'aire S du domaine délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 8$.
On donnera la valeur exacte de S puis sa valeur arrondie au centième.

Partie C

Tom observe que sur le dessin précédent, la courbe représentative de f est située en dessous des deux tangentes aux points A et 8. Il affirme :
« La courbe représentative de f sur l'intervalle $[0,5\,;\,10]$ est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes. »
Démontrer que l'affirmation de Tom est exacte.