MATHÉMATIQUES
Collège

Projet de document d'accompagnement

Proportionnalité

Le programme de la classe de sixième entre en application à la rentrée 2005

6 juillet 2005

Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche
Direction de l'Enseignement scolaire
eduscol.education.fr

PROPORTIONNALITÉ – FONCTIONS

La proportionnalité est un thème autour duquel peuvent être pensés et organisés de nombreux apprentissages mathématiques. Une bonne maîtrise par les élèves des connaissances relatives à ce thème est fondamentale, aussi bien pour son usage dans la vie courante, son utilisation dans diverses disciplines ou dans le cadre professionnel que pour son importance dans divers domaines des mathématiques.
Le fait que toutes les situations de proportionnalité, quels que soient leurs contextes, puissent être modélisées par un seul type de fonctions numériques de la variable réelle, la fonction linéaire, est mis en évidence en classe de troisième où ce type de fonctions est étudié et intégré au type des fonctions affines, inaugurant ainsi l'étude de la notion de fonction qui est poursuivie tout au long du lycée, notamment dans l'enseignement de l'analyse. Cependant, dès le cycle 3 de l'école primaire, l'étude de telles situations est abordée, en mettant en œuvre de manière moins formelle, moins économique mais également moins abstraite certains aspects de ce modèle mathématique.

I - Proportionnalité

La fonction linéaire est le modèle mathématique numérique actuellement privilégié pour modéliser une situation de proportionnalité. A une époque plus ancienne, la définition de deux suites de nombres proportionnelles était donnée dans le cadre de la théorie des proportions[1] qui était utilisée.
Or la fonction linéaire ne fait l'objet d'une première étude qu'en classe de troisième alors que le travail sur la proportionnalité commence au cycle 3 de l'école primaire. Il s'agit donc de concevoir les étapes d'un enseignement de la proportionnalité qui ne prend pas directement appui sur la notion de fonction linéaire et qui doit tenir compte de l'évolution du domaine numérique disponible pour les élèves : entiers naturels, puis nombres décimaux, puis nombres rationnels (et quelques nombres réels) pour ce qui concerne la scolarité obligatoire.

I-1. Différents aspects de la proportionnalité

a) La proportionnalité peut être envisagée dans **trois cadres différents**, qui souvent peuvent être mis en interaction (passage d'un cadre à l'autre pour résoudre un problème, par exemple) :
- le cadre des grandeurs : c'est celui dans lequel se rencontrent le plus souvent les situations de proportionnalité, mettant en relation deux grandeurs (masse et prix, masse et longueur dans le cas de l'allongement d'un ressort, longueurs dans le cas du périmètre du cercle en fonction de son rayon, longueur et aire dans le cas de triangles de même base et de hauteur variable, distance et durée dans le cas d'un mouvement uniforme…) ;
- le cadre numérique, dans lequel on s'intéresse uniquement aux relations entre nombres ;
- le cadre graphique : représentation de la relation entre les grandeurs ou entre les nombres dans un système d'axes gradués ;

b) Dans le cadre des grandeurs, **la proportionnalité peut être mise en évidence de plusieurs manières différentes qui dépendent notamment des contextes utilisés** :
- dans certains cas, la proportionnalité a un caractère arbitraire et relève d'une décision sociale : le prix peut être décidé comme étant ou non proportionnel à la masse (le plus souvent, dans un intervalle déterminé). Cela pose la question du caractère implicite de nombreux énoncés ; cet implicite devrait être levé par une discussion avec les élèves ;
- dans d'autres cas, la reconnaissance d'une relation de proportionnalité entre grandeurs relève d'une expérimentation (notamment en physique) qui permet de déterminer dans quelles limites le modèle proportionnel est utilisable : c'est le cas déjà évoqué de l'allongement du ressort en fonction de la masse suspendue ;
- dans le contexte de la géométrie et de la mesure, la mise en évidence de la proportionnalité relève d'une preuve formelle (démonstration), qui est ou non à la portée des élèves : ainsi, un élève de quatrième peut démontrer, dans le cas du carré, la relation de proportionnalité entre longueurs des diagonales et longueurs des côtés… alors que, dans le cas du cercle, il ne peut que vérifier expérimentalement celle qui existe, entre longueurs des périmètres et longueurs des rayons ;
- enfin, la proportionnalité est utilisée comme outil pour définir de nouvelles notions, à partir d'une hypothèse de proportionnalité (en général non vérifiée), comme lorsqu'il s'agit d'exprimer des proportions ou des pourcentages : 3 fumeurs sur 5 (ou 6 fumeurs sur 10 ou encore 60 % des fumeurs) ont arrêté de fumer permet d'exprimer une proportion qui n'est vérifiée que pour la population toute entière et pas, en général, pour des sous populations.

Il est important que les élèves soient confrontés à des situations relevant de ces différentes catégories, dans des contextes variés, notamment en exploitant des situations empruntées à d'autres disciplines ou à des questions de société (sécurité routière, par exemple). En particulier, la réalisation de graphiques nécessite la mobilisation de connaissances relatives à la proportionnalité par exemple celle d'un diagramme en bâtons repose sur le principe de construction de hauteurs de bâtons proportionnelles aux effectifs représentés.
Il est également essentiel qu'ils soient confrontés, très tôt, à des situations dans lesquelles le modèle proportionnel n'est pas pertinent (longueur du ressort en fonction de la masse suspendue, aire du carré en fonction de la longueur du côté, prix de l'affranchissement en fonction de la masse de la lettre ou du colis, prix d'une course en taxi en fonction de la distance parcourue…).

I-2. Différents problèmes à propos de la proportionnalité

Les élèves peuvent être confrontés à différents types de questions :
- reconnaître, à partir d'une série de données, si l'hypothèse de proportionnalité peut être formulée ou non ;
- rechercher une ou plusieurs données manquantes dans une situation de proportionnalité (problème de recherche d'une quatrième proportionnelle) ;
- comparer des proportions (par exemple des mélanges : tel mélange eau-sucre est-il plus ou moins sucré que tel autre ?) ;
- passer du cadre des grandeurs ou du cadre numérique au cadre graphique et inversement.

I-3. Différents moyens de résolution

Toutes les procédures de résolution utilisables peuvent être reliées à des propriétés de la fonction linéaire qui sont d'abord utilisées de façon implicite :
- utilisation de la propriété d'additivité, qui peut être exprimée, en troisième par : $f(x+y) = f(x) + f(y)$;
- utilisation de la propriété d'homogénéité (appelée aussi procédure scalaire), qui peut être exprimée, en 3^e par : $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ avec le cas particulier « du passage par l'unité » ou « règle de trois »[2] ;
- utilisation d'une combinaison linéaire, faisant intervenir les deux

[1] Le cours de Philippe & Dauchy (1920) précise ainsi que « Deux suites de nombres qui se correspondent un à un sont proportionnelles lorsque les rapports de deux nombres correspondants sont égaux ».

[2] La « règle de trois » a longtemps été enseigné comme un procédé permettant de résoudre les problèmes de recherche d'une quatrième proportionnelle. Un problème cette époque comme « En 6 jours, un ouvrier gagne 250 F. Combien gagne-t-il en 15 jours ? » donne lieu à la mise en forme suivante : $\frac{250F \times 15}{6}$, avec la recommandation de simplifier avant d'effectuer les calculs.

procédures précédentes ;
- utilisation du coefficient de proportionnalité (appelée aussi procédure fonctionnelle) ;
- utilisation de l'égalité des rapports ;
- utilisation de l'égalité des produits en croix ;
- utilisation d'une représentation graphique.

Trois objectifs peuvent être assignés à l'enseignement au cours de la scolarité obligatoire :
- augmenter la capacité à mobiliser une procédure donnée et en accroître l'efficacité, notamment en permettant aux élèves de l'utiliser avec d'autres types de nombres que ceux avec lesquels elle a d'abord fonctionné ;
- augmenter la variété des procédures utilisables et inciter les élèves à opérer le choix le plus approprié à la situation particulière à traiter ;
- renforcer la compréhension des liens qui existent entre ces différentes procédures, avec, en fin de collège, une synthèse possible à l'aide de la fonction linéaire et de ses propriétés.

I-4. La proportionnalité dans la scolarité obligatoire : différentes étapes d'un apprentissage.

Le tableau suivant met en évidence les principales étapes de l'apprentissage des moyens de traiter une situation de proportionnalité, les langages utilisés, les types de nombres rencontrés et les cadres dans lesquels elle est étudiée, avec quelques commentaires explicatifs.

A chaque étape, différents contextes doivent être mobilisés et la diversité des problèmes doit être aussi grande que possible.

Niveau	Cadres	Types de nombres	Procédures de résolution	Commentaires (types de problèmes, langage utilisé…)	Relations avec d'autres domaines du programme
Cycle 3	Grandeurs	- Naturels - Décimaux simples (rapport scalaire ou coefficient du type 1,5 ou 2,5…)	Raisonnement proportionnel, utilisant : - propriété additive - propriété d'homogénéité - passage par l'unité - coefficient de proportionnalité « simple »	- Aucune procédure spécifique n'est travaillée. Les problèmes sont résolus par recours à des raisonnements contextualisés, sans formalisation. - Ces raisonnements sont exprimés en langage ordinaire (oral ou écrit). - Des problèmes faisant intervenir les pourcentages, les échelles, les vitesses moyennes sont résolus par les mêmes procédures, sans que soient mises en place de techniques spécifiques. On se reportera utilement au document d'application pour le cycle 3.	- Exploitation de données numériques : diagrammes, graphiques - Nombres entiers et décimaux : placement sur une demi- droite graduée - Géométrie : agrandissement, réduction de figures - Mesure : conversion d'unités
Sixième	Grandeurs	- Naturels - Décimaux simples - Quotients (plus le nombre π)	Raisonnement proportionnel, utilisant : - propriété additive - propriété d'homogénéité - passage par l'unité - coefficient de proportionnalité	- La nouvelle signification donnée aux fractions (signification quotient) permet une généralisation du recours à la propriété multiplicative ou au coefficient de proportionnalité (en donnant du sens à des expressions comme « 7/3 fois plus », « 2,5 fois plus » ou « multiplier par 7/3 », « multiplier par 2,5 »…) - Aucune formalisation particulière n'est exigée. L'utilisation de tableaux ou de schémas fléchés peut être envisagée, sans être systématisée. Des expressions telles que "p. de 7,5 kg = 26 €" (pour évoquer le prix de 7,5 kg dans une situation masse - prix) peuvent être utilisées, notamment pour rendre compte des raisonnements évoqués ci-dessus. Ces expressions préparent le formalisme fonctionnel qui sera introduit plus tard, en particulier en 3^{e}. Elles sont accompagnées de formulations orales du type « le prix de 7,5 kg de marchandise est égal à 26 € ». - Les problèmes proposés peuvent faire intervenir les échelles, les vitesses moyennes, sans mise en place de techniques spécifiques. - Pour les pourcentages, une technique est mise en place et justifiée pour appliquer un pourcentage. Cependant pour calculer 25 % de 200, les élèves doivent rester capables d'utiliser un raisonnement plus rapide du type « 25 pour 100, c'est comme 50 pour 200 » ou « prendre 25 % de 200, c'est prendre le quart de 200 ».	- Organisation et gestion de données : placement exact ou approché d'entiers naturels, de décimaux ou de quotients sur une demi-droite graduée ; représentations graphiques : diagrammes en bâtons, circulaires ou demi-circulaires, graphiques cartésiens. - Mesure : changements d'unités ; longueur du cercle.

Cinquième	Grandeurs Numérique	- Naturels - Décimaux - Quotients (plus le nombre π)	Formulation et utilisation des propriétés : - propriété additive - propriété d'homogénéité - passage par l'unité - coefficient de proportionnalité	- La proportionnalité commence à être étudiée dans le cadre purement numérique (tableaux de nombres représentant une relation de proportionnalité, explicitation des propriétés), mais la plupart des activités restent contextualisées. - Aucune nouvelle procédure de résolution n'est introduite, mais le recours à des mises en forme (tableaux, schémas fléchés) est exigé. L'usage des expressions utilisées en sixième peut être poursuivi et évoluer, en cinquième ou en quatrième, vers celui d'expressions du type p(7,5 kg) = 26 €. - Les problèmes restent diversifiés, mais les notions de proportion (pour un mélange), d'échelle, de mouvement uniforme sont explicitées. - Des techniques sont mises en place pour traiter les problèmes faisant intervenir ces notions, ainsi que pour calculer un pourcentage. Ces techniques n'ont à être utilisées que lorsque la complexité de la situation l'exige. Dans des cas simples, un raisonnement fondé sur le sens suffit à traiter la situation, comme par exemple pour calculer la distance parcourue en 1h30 par une voiture qui roule à 100 km/h (le calcul de 100 km + 50 km suffit pour trouver la réponse !). - Le lien avec le cadre graphique est abordé, sans justification.	- Organisation et gestion de données : placement exact ou approché d'entiers, de décimaux ou de quotients sur une demi-droite graduée ; repérage dans le plan ; notion de fréquence ; représentations graphiques : diagrammes rectangulaires, circulaires, demi-circulaires, graphiques cartésiens, histogramme. - Mesure : changements d'unités ; relation entre aire ou volume d'une figure ou d'un solide et une de ses dimensions, lorsque les autres sont fixées.
Quatrième	Grandeurs Numérique Graphique	- Naturels - Décimaux - Quotients (plus le nombre π)	- Utilisation des propriétés travaillées en 6^e et 5^e - Egalité de quotients et produits en croix - Caractérisation graphique (sans justification)	- A partir du travail sur l'égalité de quotients, la procédure appelée « produit en croix » peut maintenant être justifiée et donc utilisée. Son usage ne doit cependant pas être systématisé. Elle est difficile à interpréter du point de vue des grandeurs. - La non additivité des pourcentages est mise en évidence. - La notion d'indice est abordée. - Les problèmes de changement d'unités dans la cas de grandeurs quotients (vitesse, débit, change…) peuvent être traités en utilisant le calcul sur les grandeurs ou en utilisant la proportionnalité.	- Géométrie : propriété de Thalès ; notion de cosinus ; agrandissement et réduction de figures. - Mesure : relation entre aire ou volume d'une figure ou d'un solide et une de ses dimensions, lorsque les autres sont fixées ; relation d = vt ; changements d'unités de vitesse.
Troisième	Grandeurs Numérique Graphique	- Naturels - Décimaux - Quotients (plus les nombres π, $\sqrt{2}, \sqrt{3}$...)	- Modélisation et traitement à l'aide d'une fonction linéaire - Les procédures envisagées antérieurement restent disponibles.	- Le travail sur la fonction linéaire permet une synthèse des différentes propriétés rencontrées antérieurement. - Le langage fonctionnel $x \mapsto ax$ est introduit. Des écritures comme $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ et $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ peuvent être utilisées[3]. La mise en place de ce langage a été préparée dans les classes antérieures par des formulations du type p. de 7 kg = p. de 3 kg + p. de 4 kg, puis éventuellement par des formulations du type p(7kg) = p(3 kg) + p (4 kg). - La caractérisation graphique de la proportionnalité peut faire l'objet d'une justification, grâce à l'énoncé de Thalès et le coefficient de proportionnalité peut être	Géométrie : théorème de Thalès, notions de sinus et de tangente Mesure : agrandissement et réduction de figures ou de solides (effets sur les longueurs, les aires ou les volumes) ; changements d'unités sur des grandeurs produits ou des grandeurs quotients.

[3] Ce type de notation permet, sur des valeurs numériques, de rendre compte des traitements utilisés. Par exemple, si une donnée est formalisée à l'aide d'une fonction linéaire f par f(5) = 12 et que la question conduit à chercher f(7), on peut écrire que

$7 = \frac{7}{5} \times 5$, donc que $f(7) = f(\frac{7}{5} \times 5) = \frac{7}{5} \times f(5) = \frac{7}{5} \times 12$.

				interprété graphiquement. - Les problèmes de changement d'unités dans la cas de grandeurs quotients (vitesse, débit, change…) ou de grandeurs produits peuvent être traités en utilisant le calcul sur les grandeurs ou en utilisant la proportionnalité. - L'effet d'un agrandissement ou d'un réduction sur l'aire ou le volume fournit des exemples intéressants de non proportionnalité.	

II - Fonctions

Le travail sur la proportionnalité, et plus largement sur l'étude de relations entre grandeurs ou données numériques, a permis d'utiliser des formules, des tableaux de nombres et des représentations dans le plan muni d'un repère, en particulier comme outils pour résoudre des problèmes. Ainsi, à l'occasion du traitement de situations de proportionnalité dans divers contextes, les élèves ont été amenés à passer d'un langage à un autre (par exemple, d'une formule ou d'un graphique à un tableau de nombres). Mais, si des expressions telles que « en fonction de » ou « est fonction de » ont été utilisées, si des désignations telles que " prix de 7,5 kg" ou "p. de 7,5 kg" ou éventuellement "p(7,5kg)" ont été utilisées dans les raisonnements, les fonctions numériques associées à ces formules, à ces tableaux ou à ces représentations ou désignations n'ont pas été explicitées de manière formelle et décontextualisée. Le passage des grandeurs aux mesures permet justement une telle formalisation, et c'est alors que le modèle unique de la fonction linéaire trouve sa légitimité. Dans le contexte de l'exemple précédent, on est alors amené à simplifier les écritures et à noter plus simplement p(7,5). La nécessité de trouver une lettre indépendante de tout contexte permet de justifier l'introduction de la lettre f, et de donner du sens à des expressions telles que $f(7{,}5)$ et plus généralement $f(x)$.

II-1. Un premier contact avec la notion de fonction

La classe de troisième est l'occasion du premier véritable contact des élèves avec cette notion de fonction numérique (sous son aspect formel), dans sa conception actuelle qui fait correspondre à tout élément d'un ensemble un élément d'un autre ensemble. Il ne s'agit pas de donner une définition générale de la notion de fonction, même si les exemples travaillés ne doivent pas être limités à des fonctions linéaires ou affines. Des exemples de fonctions simples sont également utilisés, en particulier pour montrer que toute représentation graphique ne se réduit pas à un ensemble de points alignés (par exemple, en représentant quelques points dont les coordonnées sont obtenues à l'aide de la fonction « carré », sur un intervalle). La notation $x \mapsto f(x)$ est utilisée, ainsi que les termes *image* et *antécédent*.

La notation $f(x)$ est donc introduite pour des valeurs particulières de 1a variable du type $f(2)$, $f(-3)$,..., en veillant à différencier avec les élèves le statut des parenthèses dans ce type de notation de leur signification dans un calcul algébrique, ce que le travail fait dans les classes antérieures dans le cadre des grandeurs avec des expressions telles que p. de 7,5 kg, puis p(7,5 kg) = 26 €, facilite grandement. Les notations fonctionnelles amènent en effet à utiliser des lettres avec une nouvelle signification : successivement, au collège, les lettres ont ainsi été utilisées de façon « expressive » en référence à des grandeurs (comme dans la formule de l'aire du rectangle), pour désigner des inconnues (dans les équations), des valeurs indéterminées (dans les identités remarquables, par exemple) et enfin; des variables (dans le langage des fonctions).

II-2. Fonction linéaire et fonction affine

La notion de fonction linéaire permet, en classe de troisième, d'opérer une synthèse des différents aspects de la proportionnalité rencontrés tout au long du collège et de les exprimer et de les traiter dans un nouveau langage. Toute situation de proportionnalité est modélisable par une fonction linéaire. Dans cette perspective, il convient d'être attentif, avec les élèves, aux questions soulevées par le domaine d'adéquation du modèle mathématique avec la situation traitée, en ayant soin de préciser, chaque fois, le domaine de signification de la fonction - définie, elle, sur l'ensemble des (réels) - dans le contexte de la situation traitée (qui impose souvent une restriction à un intervalle ou à un nombre fini de valeurs).

Les élèves sont amenés à remarquer que la fonction affine caractérise une situation dans laquelle il existe une relation de proportionnalité entre les accroissements des 2 variables en jeu.

La notation $x \mapsto ax$ n'est introduite que pour des valeurs particulières de a, en liaison avec le coefficient de proportionnalité et d'expressions verbales du type « L'image d'un nombre est obtenue en multipliant ce nombre par a ».

La fonction linéaire doit aussi apparaître comme un cas particulier de la fonction affine.

Le travail sur des situations modélisables par de telles fonctions est l'occasion de formuler un même problème dans différents cadres et d'habituer les élèves à passer d'un cadre à l'autre, pour interpréter des résultats ou des propriétés : formules, tableaux de nombres, fonctions, représentations graphiques. C'est en particulier ce qui permettra d'utiliser une représentation graphique pour obtenir une solution (souvent approchée) d'un système d'équations à deux inconnues.