

1 Polynômes

Exercice 1 - Continuité des racines d'un polynôme, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Soit (P_k) une suite de polynôme scindés de $K[X]$, de degré N , qui tend vers un polynôme P scindé de degré N .

On munit $K[X]$ de la norme $\|\cdot\|_1$ définie de la manière suivante :

$$\|a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n\|_1 = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$$

1. Montrer que l'on peut supposer P_k et P unitaire (ce que l'on supposera à partir de maintenant).
2. Montrer que si z est une racine de P alors $|z| \leq \|P\|_1$.
3. En déduire que l'ensemble des racines des P_k est borné.
4. On va démontrer la propriété $(\mathcal{P})$: Si z est une racine de P de multiplicité p alors quelque soit ε , pour n assez grand, $\mathcal{B}(z, \varepsilon)$ contient exactement p racines de P_k . On raisonne par l'absurde en supposant vraie la négation de $(\mathcal{P})$.

(a) Montrer que l'on peut alors construire une extraction $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que :

$$\forall k \geq 1, |z - x_{N, \psi(k)}| \geq |z - x_{N-1, \psi(k)}| \geq \dots \geq |z - x_{p, \psi(k)}| \geq \varepsilon$$

où $x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{N,k}$ sont les N racines de P_k

(b) Montrer que l'on peut supposer que les $(x_{i, \psi(k)})_k$ sont des suites convergentes pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

(c) On note $y_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{i, \psi(k)}$.

Montrer que $P_{\psi(k)}$ tend vers $\prod_{i=1}^N (X - y_i)$ et en déduire une contradiction.

5. Montrer que l'on peut se passer de l'hypothèse " P est scindé".

2 Espaces vectoriels normés

Exercice 2 - Théorème d'Auerbach

Soit E un espace vectoriel normé de dimension n . On pose $S = \{x \in E / \|x\| = 1\}$.

1. Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E , montrer la formule :

$$e_i^*(x) = \frac{\det(e_1, \dots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \dots, e_n)}{\det(e_1, e_2, \dots, e_n)}$$

2. Montrer qu'il existe une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E , avec $\|e_i\| = 1$ pour tout i , tels que pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S^n$,

$$|\det(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq |\det(e_1, e_2, \dots, e_n)|$$

3. En déduire que $\|e_i^*\| = 1$ pour tout i (théorème d'Auerbach)

Exercice 3 - Etude d'une norme de matrice

Soit E un espace hermitien muni du produit scalaire usuel $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i$ et de la norme associée.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $f_A: E \rightarrow \mathbb{C}$
 $(x, y) \mapsto \langle Ax, y \rangle$

Que vaut $\sup_{\|x\|, \|y\| \leq 1} |f_A(x, y)|$?

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé on considère la matrice de Hilbert H_n , définie par $h_{i,j} = \frac{1}{i+j}$.
 Le but est de montrer que $\|H_n\| \leq \pi$ pour tout n .

- (a) On note $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction 2π -périodique définie par $\phi(t) = i(2\pi - t)$.
 Calculer les coefficients de Fourier c_n de ϕ , et calculer $\|\phi\|_\infty$.
 (b) Montrer que pour tout $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans $\mathbb{C}^n$

$$\sum_{1 \leq j, k \leq n} \frac{y_j x_k}{j+k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=1}^N y_j e^{-ijt} \right) \left(\sum_{k=1}^N x_k e^{-ikt} \right) \phi(t) dt$$

- (c) En déduire que $\left| \sum_{1 \leq j, k \leq n} \frac{y_j x_k}{j+k} \right| \leq \|\phi\|_\infty \left(\sum_{j=1}^N |y_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^N |x_k|^2 \right)^{1/2}$ puis que $\|H_n\| \leq \pi$

Exercice 4 - Exponentielle de matrice, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, justifier la convergence de la série $\sum \frac{A^n}{n!}$.

On note alors $\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$

2. Montrer que $\exp(A)$ est un polynôme en A (qui dépend de A). Peut-il exister un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\exp(A) = P(A)$ pour tout A ?
 3. Montrer que :

- (a) Si A et B commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ et $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$

Montrer que ce dernier résultat n'est pas vrai en général (considérer $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}$ et

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$$

- (b) $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{K})$
 (c) $\exp(\mathcal{S}_n) \subset \mathcal{S}_n$ et $\exp(\mathcal{H}_n) \subset \mathcal{H}_n$ où $\mathcal{S}_n$ (resp. $\mathcal{H}_n$) désigne l'espace vectoriel des matrices symétriques (resp. hermitiennes)
 (d) $P^{-1} \exp(A) P = \exp(P^{-1} A P)$
 (e) Si A est trigonale alors $\exp(A)$ est trigonale.
 (f) $Sp(\exp(A)) = \exp(Sp(A))$ et $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$
 4. L'application $\exp: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow GL_n(\mathbb{K})$ est-elle injective ?
 $A \mapsto \exp(A)$

On pourra s'intéresser (Gianella-Francinou par exemple) aux problèmes de surjectivité :

- $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{M^2 / M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$
- $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$

Exercice 5 - Déterminant de Gram et distance d'un point à un sous-espace

Le déterminant de Gram d'une famille $v_1, \dots, v_n$ de vecteurs d'un espace euclidien E de dimension finie est noté $\text{Gram}(v_1, \dots, v_n)$ et est défini par :

$$\text{Gram}(v_1, \dots, v_n) = \det(\langle v_i, v_j \rangle_{i,j})$$

1. Montrer que $\text{Gram}(v_1, \dots, v_n)$ est nul si et seulement si la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est liée.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $(f_1, \dots, f_m)$ une base (quelconque) de F . On décompose tout $v \in E$ sous la forme $v = v' + v''$ avec $v' \in F$ et $v'' \in F^\perp$. Montrer que :

$$\text{Gram}(v, f_1, \dots, f_m) = \|v''\|^2 \text{Gram}(f_1, \dots, f_m)$$

et en déduire que :

$$d(v, F)^2 = \frac{\text{Gram}(v, f_1, \dots, f_m)}{\text{Gram}(f_1, \dots, f_m)}$$

où $d(v, F)$ désigne la distance de v à F .