1 Polynômes

Exercice 1 - Continuité des racines d'un polynôme, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
Soit (P_k) une suite de polynôme scindés de $K[X]$, de degré N, qui tend vers un polynôme P scindé de degré N.
On munit $K[X]$ de la norme $\|.\|_1$ définie de la manière suivante :

$$\|a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n\|_1 = |a_0| + |a_1| + ... + |a_n|$$

1. Montrer que l'on peut supposer P_k et P unitaire (ce que l'on supposera à partir de maintenant).
2. Montrer que si z est une racine de P alors $|z| \leq \|P\|_1$.
3. En déduire que l'ensemble des racines des P_k est borné.
4. On va démontrer la propriété $(\mathcal{P})$: Si z est une racine de P de multiplicité p alors quelque soit ε, pour n assez grand, $\mathcal{B}(z, \varepsilon)$ contient exactement p racines de P_k. On raisonne par l'absurde en supposant vraie la négation de $(\mathcal{P})$.
   (a) Montrer que l'on peut alors construire une extraction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :

   $$\forall k \geq 1,\ |z - x_{N,\psi(k)}| \geq |z - x_{N-1,\psi(k)}| \geq ... \geq |z - x_{p,\psi(k)}| \geq \varepsilon$$

   où $x_{1,k}, x_{2,k}, ..., x_{N,k}$ sont les N racines de P_k
   (b) Montrer que l'on peut supposer que les $(x_{i,\psi(k)})_k$ sont des suites convergentes pour tout $i \in [\![1, N]\!]$.
   (c) On note $y_i = \lim\limits_{n \to +\infty} x_{i,\psi(k)}$.

   Montrer que $P_{\psi(k)}$ tend vers $\prod\limits_{i=1}^{N}(X - y_i)$ et en déduire une contradiction.
5. Montrer que l'on peut se passer de l'hypothèse "P est scindé".

2 Espaces vectoriels normés

Exercice 2 - Théorème d'Auerbach
Soit E un espace vectoriel normé de dimension n. On pose $S = \{x \in E / \|x\| = 1\}$.

1. Si $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E, montrer la formule :

$$e_i^*(x) = \frac{\det(e_1, ..., e_{i-1}, x, e_{i+1}, ..., e_n)}{\det(e_1, e_2, ..., e_n)}$$

2. Montrer qu'il existe une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E, avec $\|e_i\| = 1$ pour tout i, tels que pour tout $(x_1, x_2, ..., x_n) \in S^n$,

$$|\det(x_1, x_2, ..., x_n)| \leq |\det(e_1, e_2, ..., e_n)|$$

3. En déduire que $\|e_i^*\| = 1$ pour tout i (théorème d'Auerbach)

Exercice 3 - Etude d'une norme de matrice
Soit E un espace hermitien muni du produit scalaire usuel $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$ et de la norme associée.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\begin{array}{rcl} f_A \colon E & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & \langle Ax, y\rangle \end{array}$
   Que vaut $\displaystyle\sup_{\|x\|,\|y\|\leq 1} |f_A(x,y)|$?

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé on considère la matrice de Hilbert H_n, définie par $h_{i,j} = \dfrac{1}{i+1}$.
   Le but est de montrer que $\|H_n\| \leq \pi$ pour tout n.

   (a) On note $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction $2\pi-$périodique définie par $\phi(t) = i(2\pi - t)$.
   Calculer les coefficients de Fourier c_n de ϕ, et calculer $\|\phi\|_\infty$.

   (b) Montrer que pour tout $(y_1, y_2, ..., y_n)$ et $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dans $\mathbb{C}^n$

   $$\sum_{1\leq j,k\leq n} \frac{y_j x_k}{j+k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=1}^{N} y_j e^{-ijt}\right)\left(\sum_{k=1}^{N} x_k e^{-ikt}\right)\phi(t)dt$$

   (c) En déduire que $\displaystyle\left|\sum_{1\leq j,k\leq n} \frac{y_j x_k}{j+k}\right| \leq \|\phi\|_\infty \left(\sum_{j=1}^{N}|y_j|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{N}|x_k|^2\right)^{1/2}$ puis que $\|H_n\| \leq \pi$