Nombres complexes 2$^{\text{ème}}$ partie

II] Forme trigonométrique

1. Module d'un nombre complexe

• Si le point M est l'image du complexe z = a + bi ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$) dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on appelle module de z, noté $|z|$, la distance OM

$$\boxed{|z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{ou } |z| = \sqrt{z\bar{z}}}$$

• Propriétés : $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; $|-z| = |z|$; $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

$|zz'| = |z|.|z'|$; $|z^n| = |z|^n$; $|\bar{z}| = |z|$

Pour z' non nul : $\left|\dfrac{1}{z'}\right| = \dfrac{1}{|z'|} = \dfrac{\overline{z'}}{|z'|^2}$ et $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

Si M a pour affixe z et si M' a pour affixe z' alors OM = $|z|$ et MM' = $|z' - z|$

Si $\vec{u}$ a pour affixe z, alors $\|\vec{u}\| = |z|$.

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $2|z|^2 + 3z - 13 - 6i = 0$

Exercice 2 : Déterminer l'ensemble des points M (d'affixe z) du plan complexe tels que

a) $|z - 1 + 2i| = 5$ b) $|z - 3 + 5i| = |z + 2i|$

2. Argument d'un nombre complexe

• Définition : **Un argument** du nombre complexe z **non nul** est une mesure de l'angle polaire du point M dans le plan complexe muni du repère $(O;\vec{u};\vec{v})$, c'est à dire une mesure θ de l'angle orienté $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$.

Le réel 0 n'a pas d'argument. Le nombre complexe i a pour module 1 et pour argument $+\dfrac{\pi}{2}$.

• Propriétés :

L'argument d'un nombre complexe z n'est pas unique, il est défini modulo 2π.

Si θ est un argument de z, on notera $\arg z = \theta\ [2\pi]$ ou $\arg z = \theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

On appelle **argument principal de z** l'argument de z appartenant à $]-\pi ; \pi]$.

Tout réel positif a un argument égal à 0.

Tout réel négatif a un argument égal à π.

Tout nombre imaginaire pur, de partie imaginaire strictement positive a un argument égal à $\dfrac{\pi}{2}$ et tout nombre imaginaire pur, de partie imaginaire strictement négative a un argument égal à $-\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 3 : Déterminer l'ensemble des points M (d'affixe z) du plan complexe tels que

a) $\arg(z+2i) = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) b) $\arg(z-1) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $z' \in \mathbb{C}^*$, on a $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z')\ [2\pi] \end{cases}$

Soit z nombre complexe non nul : z = a + bi , $|z| = r$ et $\arg z = \theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

alors $\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{\text{Re}(z)}{|z|} \ ; \ \sin\theta = \dfrac{b}{r} = \dfrac{\text{Im}(z)}{|z|} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$

z et z' étant deux nombres complexes non nuls on a :

- **arg(zz') = arg z + arg z' + 2kπ (k ∈ ℤ) (ROC)** ; arg $\frac{1}{z}$ = - arg z + 2kπ (k ∈ ℤ)
- **arg $\frac{z}{z'}$ = arg z - arg z' + 2kπ (k ∈ ℤ)** ; Pour n entier : arg (z^n) = n arg z + 2kπ (k ∈ ℤ)
- arg ($\bar{z}$) = - arg z + 2kπ (k ∈ ℤ) ; arg (- z) = arg z + π + 2kπ (k ∈ ℤ)

3. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Tout nombre complexe non nul z peut-être écrit sous la forme : $\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$
avec θ ∈ ℝ et r ∈ $\mathbb{R}_+^*$
C'est la **forme trigonométrique** de *z*.
r est le module de z, r = |z|
θ est un argument de z. On note aussi z = [|z| ; θ]

Si z = r (cos θ + i sin θ) alors Re(*z*) = r cos θ et Im(*z*) = r sin θ.
$\bar{z}$ = r (cos(-θ) + i sin(-θ)) ; - z = r (cos(θ + π) + i sin(θ + π)) ; et $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

Exercice 4 : Déterminer la forme trigonométrique de $z_1 = \sqrt{3} - i$; $z_2 = -1 + i$ et $z_3 = -2i$

4. Utilisation en géométrie

La notion de distance correspond au module - La notion d'angle à l'argument.

A, B , C et D étant quatre points distincts d'affixes z_A, z_B , z_C et z_D dans $(O;\vec{u};\vec{v})$, alors :

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$,
- **AB =** $|z_B - z_A|$
- **l'angle** $(\vec{u};\overrightarrow{AB})$ a pour mesure arg($z_B - z_A$) [2π]
- **l'angle** $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})$ a pour mesure arg($z_D - z_C$) - arg($z_B - z_A$) = $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

Exercice 5 : On considère les points A, B et C d'affixes respectives -1+2i ; 4-3i et 3i. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
Exercice 6 : On considère les points A, B et C d'affixes respectives i ; 2+i et $1 + i(\sqrt{3} + 1)$. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

- **Comment démontrer que trois points A, B et C sont alignés** :

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \text{ est un nombre réel} \Leftrightarrow \text{ l'angle } (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \text{ est nul}$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0 + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

- **Comment démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales** :

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \text{ est un imaginaire pur}$$

$$\Leftrightarrow \textbf{ l'angle } (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) \text{ a pour mesure } \frac{\pi}{2} \text{ ou } -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$