ministère
éducation
nationale

Liberté • Égalité • Fraternité
République Française

éduscol

Ressources pour le lycée général et technologique

Ressources pour la classe terminale
générale et technologique

Mathématiques
Série S

Enseignement de spécialité

juin 2012

Table des matières

Introduction

Un enseignement qui prend appui sur la résolution de problèmes

Le programme de l'enseignement de spécialité de la terminale scientifique réintroduit l'algèbre linéaire au lycée. Mais l'algèbre linéaire du lycée des années 1980 s'appuyait sur les vecteurs du plan et de l'espace, et l'introduction des espaces vectoriels. L'entrée proposée aujourd'hui est matricielle : il s'agit de faire jouer un rôle à des tableaux de nombres, lorsqu'ils sont particulièrement adaptés à l'écriture et à la résolution de certains problèmes.

La première partie du présent document présente donc des problèmes où l'introduction des matrices vient « naturellement » et apparaît comme une simplification d'écriture et de lecture. Le vocabulaire nouveau est introduit en situation. Les définitions et les théorèmes auxquels il est nécessaire de faire référence ne sont pas sortis du contexte du problème, au moins dans un premier temps.

Une petite mise en ordre des notions nouvelles est proposée dans la seconde partie. Des définitions convenables et des théorèmes bien rédigés sont en effet indispensables au jalonnement des avancées mathématiques. Les professeurs sont invités, conformément à la recommandation du programme, à ne pas démarrer directement par la présentation des contenus théoriques exposés dans la seconde partie, mais à essayer la démarche proposée consistant à introduire les notions dans le cadre de problèmes à résoudre. Cette démarche semble aujourd'hui susceptible d'accrocher des élèves qu'il s'agit de conquérir et de convaincre de l'intérêt pour eux de la poursuite d'études scientifiques.

La base de connaissances introduite en seconde partie permet ensuite une présentation d'autres contenus du programme, en se situant de nouveau dans le contexte de problèmes. Ainsi la troisième partie développe plus complètement certains thèmes mentionnés comme exemples dans le programme et ouvre des perspectives pour aborder d'autres sujets. On y trouvera notamment des connexions possibles avec la partie « arithmétique » du programme.

Des liens vers des ressources sont régulièrement proposés. Il s'agit dans certains cas d'outils permettant de se libérer de quelques phases de calcul dont la conduite et l'achèvement éloigneraient trop les élèves du problème traité. On doit pouvoir insister le temps qu'il faut sur certains points de calcul dont la maîtrise est un réel objectif de l'enseignement, quitte à s'en remettre à d'autres moments aux outils dont on dispose aujourd'hui pour pouvoir concentrer l'attention des élèves sur le problème à résoudre et les raisonnements nécessaires pour y parvenir.

I. Quelques problèmes faisant apparaître des matrices

Dans cette partie, le vocabulaire spécifique aux matrices et les opérations sur les matrices ne sont pas supposés connus. Lorsque la nécessité s'en fait sentir, des matrices sont introduites, sur lesquelles on peut faire des opérations (le produit de Cayley notamment, couramment utilisé sous le simple nom de produit, et qui est celui proposé par la calculatrice scientifique). La partie II proposera une étude plus systématique, mais la recommandation du programme est de commencer par des résolutions de problèmes motivant une introduction des matrices et non par une introduction ex nihilo de ces dernières et encore moins de l'algèbre linéaire.

A. Un problème à deux compartiments

1. Le problème

On conserve dans une enceinte une population d'êtres unicellulaires qui ne peuvent se trouver que dans deux états physiologiques désignés par A et B. On désigne par a_n et b_n les effectifs – exprimés en milliers d'individus − des deux sous-populations (correspondant à chacun des deux états A et B) à l'instant n. Des observations menées sur une assez longue période permettent d'estimer que 95% des unicellulaires se trouvant à l'instant n dans l'état A n'ont pas changé d'état à l'instant $n + 1$, non plus que 80% de ceux se trouvant à l'instant n dans l'état B ce qui se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}2b_n \\ b_{n+1} = 0{,}05a_n + 0{,}8b_n \end{cases} \quad (*)$$

L'effectif total s'élève à 500 000 individus.

1 La population à l'instant 0 satisfait $a_0 = 375$ Faire le calcul des effectifs a_n et b_n pour $n \leq 50$.
Peut-on faire une conjecture sur le comportement des suites (a_n) et (b_n) ?
Effectuer de nouveaux essais en prenant d'autres valeurs initiales (mais un effectif total identique).

2 Quel est le comportement de la suite de terme général $\alpha_n = a_n - 400$? Conclure.

2. Commentaires sur le problème

Ce problème a été proposé dans le cadre d'une épreuve pratique de mathématiques.

Les élèves utilisaient un tableur pour conjecturer la nature des suites (a_n) et (b_n). À l'étape 36, si on fait abstraction des erreurs de calcul dues au logiciel, le système est stable : il y a 400 000 êtres dans l'état A et 100 000 dans l'état B.

Pour répondre à la question suivante, il suffit de faire entrer dans les calculs le fait que la population totale est conservée, autrement dit que, pour tout n : $a_n + b_n = 500$.

Le système $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}2b_n \\ b_{n+1} = 0{,}05a_n + 0{,}8b_n \end{cases}$ a les mêmes solutions que le système $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}75a_n + 100 \\ b_n = 500 - a_n \end{cases}$, dont les solutions (ce sont des couples de suites) s'obtiennent explicitement en faisant apparaître la suite (géométrique) de terme général $\alpha_n = 400 - a_n$.

n	a indice n	b indice n
0	375	125
1	381,25	118,75
2	385,9375	114,0625
3	389,453125	110,546875
4	392,0898438	107,9101563
5	394,0673828	105,9326172
6	395,5505371	104,4494629
7	396,6629028	103,3370972
8	397,4971771	102,5028229
9	398,1228828	101,8771172
10	398,5921621	101,4078379
11	398,9441216	101,0558784
12	399,2080912	100,7919088
13	399,4060684	100,5939316
14	399,5545513	100,4454487
…	…	…
…	…	…
…	…	…
…	…	…
31	399,9966516	100,0033484
32	399,9974887	100,0025113
33	399,9981165	100,0018835
34	399,9985874	100,0014126
35	399,9989405	100,0010595
36	399,9992054	100,0007946

3. D'autres façons d'écrire le problème

On peut schématiser le système de relations (*) par : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}2 \\ 0{,}05 & 0{,}8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, donnant ainsi une signification au symbole × utilisé ici pour représenter l'action d'un tableau carré (une *matrice carrée d'ordre 2*) sur un couple de réels écrits en colonne (une *matrice-colonne*).

Le produit des matrices utilisable sur la calculatrice fonctionne ainsi et on pourrait écrire que, pour tout entier naturel n non nul, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}2 \\ 0{,}05 & 0{,}8 \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$.

Cette *puissance n-ième* de matrice peut-elle s'exprimer explicitement ?

Cette question n'est pas abordée ici. Notons que des simplifications sont certainement envisageables comme le laissent penser les résultats obtenus sur la suite (α_n). En effet, si on pose $\beta_n = b_n - 100$, on obtient le système : $\begin{cases} \alpha_n = 0{,}75^n \alpha_0 \\ \beta_n = 0{,}75^n \beta_0 \end{cases}$.

On en déduit que : $\begin{cases} \alpha_n = 400 - 0{,}75^n \times 25 \\ \beta_n = 100 + 0{,}75^n \times 25 \end{cases}$

ce qui montre que la répartition de la population des êtres unicellulaires se rapprochera au fil du temps de 400 000 individus dans l'état A et de 100 000 individus dans l'état B.

B. Étude, gestion et prévision économiques

1. Des tableaux de nombres pour la gestion

Voici les productions (en milliers) de deux usines de cycles appartenant à une même enseigne pour le premier semestre de l'année 2010 :

Premier semestre 2010

	VTT adultes	Vélos enfants	VTC	BMX	Vélos de course
Usine 1	12,99	13,20	5,58	1,53	1,95
Usine 2	4,62	4,98	2,16	0,51	0,78

Si on veut faire entrer les données de ce tableau dans un enchaînement de calcul, on les regroupe dans le tableau de nombres suivant :

$$A=\begin{pmatrix}12{,}99 & 13{,}20 & 5{,}58 & 1{,}53 & 1{,}95\\ 4{,}62 & 4{,}98 & 2{,}16 & 0{,}51 & 0{,}78\end{pmatrix}, \text{ appelé } \textbf{matrice}.$$

Cette matrice a 2 lignes et 5 colonnes. On dit que cette matrice est de format (2,5). Elle contient 10 éléments, appelés « **coefficients de la matrice** ». Pour repérer un coefficient d'une matrice, on indique son **indice de ligne** puis son **indice de colonne**, les lignes se comptant du haut vers le bas et les colonnes de la gauche vers la droite.

La disposition générale des coefficients de la matrice A est donc la suivante :

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\ a_{21} & a_{22} & \boldsymbol{a_{23}} & a_{24} & a_{25}\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{a_{23}}$ désigne le terme de la 2$^{\text{ème}}$ ligne et de la 3$^{\text{ème}}$ colonne : $a_{23} = 2{,}16$.

La production de l'usine 1 pour le premier semestre 2011 peut être représentée par la matrice $\begin{pmatrix}12{,}99 & 13{,}20 & 5{,}58 & 1{,}53 & 1{,}95\end{pmatrix}$ appelée « **matrice ligne de format (1,5) ».**

La production des VTT adultes dans les deux usines est représentée par la matrice $\begin{pmatrix}12{,}99\\ 4{,}62\end{pmatrix}$, appelée « **matrice colonne de format (2,1) ».**

Les productions (en milliers) des deux usines de cycles pour le second semestre de l'année 2010 sont les suivantes :

Second semestre 2010

	VTT adultes	Vélos enfants	VTC	BMX	Vélos de course
Usine 1	11,79	15,84	4,38	1,29	1,59
Usine 2	3,78	4,14	2,40	0,51	0,66

Ces données sont représentées par la matrice $A=\begin{pmatrix}11{,}79 & 15{,}84 & 4{,}38 & 1{,}29 & 1{,}59\\ 3{,}78 & 4{,}14 & 2{,}40 & 0{,}57 & 0{,}66\end{pmatrix}$.

La matrice C représentant la production annuelle pour ces deux usines est obtenue en ajoutant termes à termes les coefficients des deux matrices A et B. La matrice C est, par définition, la somme des matrices A et B. On note : $C = A + B$.

Si l'on appelle c_{ij} l'élément de la i-ième ligne et j-ième colonne de la matrice C, on a, pour tout i égal à 1 ou 2 et j compris entre 1 et 5 : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$$C = \begin{pmatrix} 24{,}78 & 29{,}04 & 9{,}96 & 2{,}82 & 3{,}54 \\ 8{,}40 & 9{,}12 & 4{,}56 & 1{,}08 & 1{,}44 \end{pmatrix}.$$

On a alors pour tout i égal à 1 ou 2 et j compris entre 1 et 5 : $b_{ij} = c_{ij} - a_{ij}$.

Par définition, la matrice B est la différence des matrices C et A : $B = C - A$

Ces opérations sont réalisables sur des matrices de même format.

La matrice D qui représente la production moyenne par mois dans ces deux usines est obtenue en divisant chacun des coefficients c_{ij} par 12. Ainsi $D = \begin{pmatrix} 2{,}065 & 2{,}42 & 0{,}83 & 0{,}235 & 0{,}295 \\ 0{,}70 & 0{,}76 & 0{,}38 & 0{,}09 & 0{,}12 \end{pmatrix}$.

On note $D = \frac{1}{12}C$.

2. Élaboration d'un indice de prix

Une association de consommateurs compare les prix de cinq produits p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 distincts dans trois magasins différents. Les observations fournissent les données suivantes :

Prix des produits à l'unité en euros

	Produit p1	Produit p2	Produit p3	Produit p4	Produit p5
magasin 1	1	5	2	3	4
magasin 2	1,1	4,7	1,8	3,1	3,8
magasin 3	0,9	5,1	1,9	3,2	4

On observe qu'on peut stocker les prix des produits sous la forme d'un tableau à 3 lignes et 5 colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ 1{,}1 & 4{,}7 & 1{,}8 & 3{,}1 & 3{,}8 \\ 0{,}9 & 5{,}1 & 1{,}9 & 3{,}2 & 4 \end{pmatrix}$$

On note ce tableau (matrice) A. Pour tout couple d'entiers (i, j) où i est compris entre 1 et 3 et j compris entre 1 et 5, le coefficient de la matrice A qui se trouve à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est noté a_{ij} et représente ici le prix unitaire du produit p_j dans le magasin i.

On écrit : $A = (a_{ij})$.

Pour comparer la dépense d'une ménagère selon les magasins, on considère un « panier » indiquant pour chaque produit la quantité achetée.

Un panier est ainsi décrit par la donnée de cinq entiers, par exemple, 2, 1, 3, 3, 2 ce qui signifie que la ménagère a acheté deux produits de type 1, un de type 2, trois de type 3, …

Le panier d'une ménagère peut donc être représenté sous la forme d'un tableau à 5 lignes et 1 colonne :

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{pmatrix}$$

Le prix Π d'un panier dans chacun des 3 magasins se calcule alors de la façon suivante :

$\Pi_1 = q_1 \times 1 + q_2 \times 5 + q_3 \times 2 + q_4 \times 3 + q_5 \times 4 = q_1 \times a_{11} + q_2 \times a_{12} + q_3 \times a_{13} + q_4 \times a_{14} + q_5 \times a_{15}$

$\Pi_2 = q_1 \times a_{21} + q_2 \times a_{22} + q_3 \times a_{23} + q_4 \times a_{24} + q_5 \times a_{25}$

$\Pi_3 = q_1 \times a_{31} + q_2 \times a_{32} + q_3 \times a_{33} + q_4 \times a_{34} + q_5 \times a_{35}$

On peut traduire les relations précédentes par l'égalité matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{pmatrix}$$

ce qui définit le produit de la matrice A par la matrice colonne Q. Dans notre exemple :

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 29{,}2 \\ 30{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ 1{,}1 & 4{,}7 & 1{,}8 & 3{,}1 & 3{,}8 \\ 0{,}9 & 5{,}1 & 1{,}9 & 3{,}2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Gestion des admissions et sorties dans un hôpital

On estime que les patients admis dans un certain service d'un hôpital peuvent se trouver dans l'un des 4 états suivants : 1. Soins réguliers, 2. Chirurgie, 3. Soins intensifs, 4. Sortie.

Cette estimation est décrite par le tableau suivant, dans lequel sont indiquées les probabilités de passage d'un des états à un autre dans un intervalle de 24 heures (probabilités obtenues par modélisation des fréquences observées sur une longue période).

Tableau de circulation des malades entre les services :

	1. Soins réguliers	**2. Chirurgie**	**3. Soins intensifs**	**4. Sortie**
1. Soins réguliers	0,6	0,2	0	0,2
2. Chirurgie	0,1	0	0,8	0,1
3. Soins intensifs	0,5	0	0,33	0,17
4. Sortie	0	0	0	0

Ce tableau se lit de la manière suivante : un malade se trouvant un jour en soins réguliers a la probabilité 0,6 de se trouver le lendemain en soins réguliers, 0,2 de se trouver en chirurgie, une probabilité nulle de se trouver en soins intensifs et la probabilité 0,2 de sortir etc.

Les informations chiffrées précédentes peuvent être stockées sous la forme d'un tableau (matrice) à 4 lignes et 4 colonnes :

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}33 & 0{,}17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Supposons qu'un certain jour, la distribution des patients suivant les quatre états possibles s'écrive $X = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. Le lendemain, la nouvelle distribution $X' = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{pmatrix}$ des nombres de malades par état d'hospitalisation (les m_i) est obtenue grâce au système suivant :

$$\begin{cases} m_1 = 12\times 0,6 + 5\times 0,1 + 6\times 0,5 + 3\times 0 \\ m_2 = 12\times 0,2 + 5\times 0 + 6\times 0 + 3\times 0 \\ m_3 = 12\times 0 + 5\times 0,8 + 6\times 0,33 + 3\times 0 \\ m_4 = 12\times 0,2 + 5\times 0,1 + 6\times 0,17 + 3\times 0 \end{cases}$$

qui donne $X' = \begin{pmatrix} 10,7 & 2,4 & 6 & 3,9 \end{pmatrix}$.

Ce résultat (dans lequel on ne doit pas se formaliser de trouver des dixièmes d'êtres humains) peut se traduire par l'égalité matricielle suivante :

$$X' = XM = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & 0,8 & 0,1 \\ 0,5 & 0 & 0,33 & 0,17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Supposons qu'au jour 0, dix patients soient admis en soins réguliers et qu'il n'y ait aucun patient en cours de traitement. On note $X_0 = (10 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0)$ la répartition des malades le jour 0 et X_k la répartition des malades au $k^{\text{ième}}$ jour, k entier positif.

Supposons également que 10 patients soient admis chaque jour.

Le processus se déroule de la manière suivante :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M + \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = X_1 M + \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = X_0 M^2 + X_0 M + X_0$$

Les calculs confiés à un tableur montrent que la situation tend à se stabiliser.

Jour	soins réguliers	chirurgie	soins intensifs	sortie
	10	0	0	0
1	16	2	0	2
2	19,8	3,2	1,6	3,4
3	23	3,96	3,093333	4,546666
4	25,742666	4,6	4,199111	5,511555
5	28,005155	5,148533	5,079703	6,308385
6	29,857798	5,601031	5,812061	6,962501
7	31,380812	5,971559	6,418178	7,500339
8	32,634732	6,276162	6,916640	7,943014
9	33,666776	6,526946	7,326476	8,307336
10	34,5159989	6,733355	7,6637162	8,607129
	…	…	…	…
	…	…	…	…
19	37,778916	7,526399	8,959652	9,759018
20	37,899815	7,555783	9,007670	9,801698
21	37,999302	7,579963	9,047183	9,836819
22	38,081169	7,599860	9,079698	9,865720
23	38,148537	7,616233	9,106454	9,889503
24	38,203972	7,629707	9,128472	9,909073
25	38,249590	7,640794	9,146589	9,925177
26	38,287128	7,649911	9,161498	9,938429
27	38,318018	7,657425	9,173767	9,949334
28	38,343437	7,663603	9,183863	9,958307

On pourrait continuer le calcul littéral précédent, pour aboutir à l'égalité suivante.

Pour tout n entier supérieur ou égal à 2, $X_n = X_0\,(M^n + M^{n-1} + \ldots + M^2 + M + I)$, , où I désigne la matrice identité d'ordre 4 (de format (4,4), dont les coefficients sont tous nuls sauf sur la diagonale principale où ils sont tous égaux à 1).

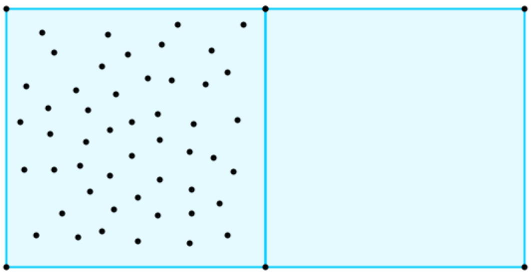
C. Le modèle d'urnes de T. & P. Ehrenfest

1. Présentation du problème

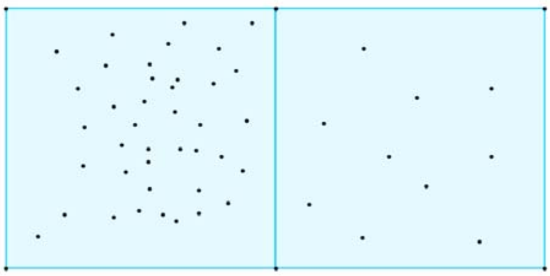
Ce modèle simplifié de diffusion d'un gaz à travers une membrane poreuse fut proposé en 1907 par les physiciens autrichiens Tatiana et Paul Ehrenfest pour décrire en termes de physique statistique les échanges de chaleur entre deux systèmes portés initialement à une température différente. Il permit ainsi de mieux comprendre le phénomène thermodynamique et de lever un paradoxe :

- d'un point de vue macroscopique, un système thermodynamique évolue naturellement et irréversiblement de façon que son entropie (quotient de la variation de chaleur par la température) soit maximum,
- mais d'un point de vue microscopique, on peut remarquer que les mouvements des particules sont réversibles.

Le but est de modéliser la répartition au cours du temps de N molécules de gaz à l'intérieur d'un récipient divisé en deux compartiments séparés par une membrane poreuse.



État initial



État à l'étape k

Description du modèle :

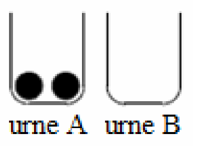
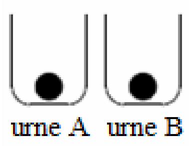
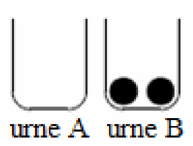
On modélise mathématiquement par l'expérience aléatoire suivante.

On considère 2 urnes A et B, et N boules numérotées de 1 a N.

Initialement, toutes les boules se trouvent dans l'urne A. Ensuite, aux étapes 1, 2, 3,… on tire au hasard, de façon équiprobable, un nombre entre 1 et N, et on change d'urne la boule correspondante.

2. Étude du cas N = 2

A chaque étape, la répartition dans les urnes A et B est l'une des trois suivantes :

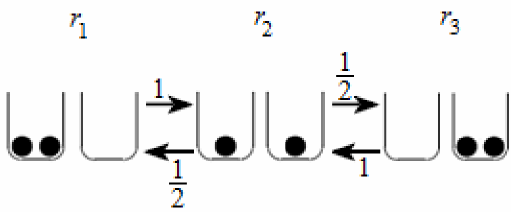
		
Répartition r_1	Répartition r_2	Répartition r_3

a) Introduction d'une matrice

Notons : R_1 l'événement « la répartition est r_1 » ;

R_2 l'événement « la répartition est r_2 » ;

R_3 l'événement « la répartition est r_3 ».



En notant, pour tout i et j de {1, 2, 3} ; $p_{ij} = p_{R_i}(R_j)$, on a alors :

$p_{12} = 1, p_{21} = \frac{1}{2}, p_{23} = \frac{1}{2}, p_{32} = 1$ et $p_{11} = p_{22} = p_{33} = p_{13} = p_{31} = 0$

Ces données peuvent être stockées sous la forme d'un tableau (matrice carrée de format (3,3)) :

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit k un nombre entier naturel non nul. On note X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne B à l'instant $k > 0$. On a bien sûr $X_0 = 0$ et pour tout entier $k > 0, X_k \in \{0, 1, 2\}$

Notons : A_k l'événement « à l'étape k, la répartition est r_1 », autrement dit « $X_k = 0$ » ;

B_k l'événement « à l'étape k, la répartition est r_2 », autrement dit « $X_k = 1$ »;

C_k l'événement « à l'étape k, la répartition est r_3 », autrement dit « $X_k = 2$ ».

On a alors : $p(A_{k+1}) = p(A_{k+1} \cap A_k) + p(A_{k+1} \cap B_k) + p(A_{k+1} \cap C_k)$

$$= p(A_k)p_{A_k}(A_{k+1}) + p(B_k)p_{B_k}(A_{k+1}) + p(C_k)p_{C_k}(A_{k+1}).$$

Or $p_{A_k}(A_{k+1}) = p_{11}$, $p_{B_k}(A_{k+1}) = p_{21}$ et $p_{C_k}(A_{k+1}) = p_{31}$.

D'où : $p(A_{k+1}) = p_{11}p(A_k) + p_{21}p(B_k) + p_{31}p(C_k)$.

On établit des relations analogues pour $p(B_{k+1})$ et $p(C_{k+1})$. On obtient finalement le système suivant :

$$\begin{cases} p(A_{k+1}) = p_{11}p(A_k) + p_{21}p(B_k) + p_{31}p(C_k) \\ p(B_{k+1}) = p_{12}p(A_k) + p_{22}p(B_k) + p_{32}p(C_k) \\ p(C_{k+1}) = p_{13}p(A_k) + p_{23}p(B_k) + p_{33}p(C_k) \end{cases}$$

En notant $V_k = (p(A_k)\ p(B_k)\ p(C_k))$ pour tout entier k strictement positif, le système de relations précédent correspond à l'égalité matricielle $V_{k+1} = V_kP$.

A l'étape initiale, la répartition est r_1, donc $V_0 = (1\ \ 0\ \ 0)$.

A l'issue de la première étape, la répartition est r_2 et $V_1 = V_0P = (0\ \ 1\ \ 0)$.

On établit par récurrence que :

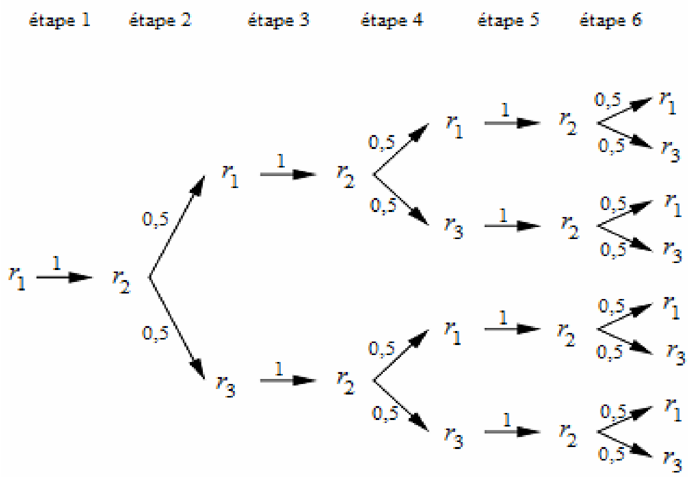
- pour tout entier naturel k non nul : $V_k = V_0 P^k$
- $P^{2k} = P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et que $P^{2k+1} = P$ pour tout entier $k \geq 1$.

On en déduit facilement que :

- pour tout entier k impair, $V_k = (0 \quad 1 \quad 0)$, ce qui correspond au fait qu'à tout instant impair, la répartition est toujours r_2
- pour tout entier k pair, non nul, $V_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, ce qui correspond au fait qu'à tout instant pair, la répartition est soit r_1 soit r_3.

Le calcul de l'espérance de X_k conduit à $E(X_k) = 1$, pour tout entier naturel k, ce qui signifie qu'au bout de k étapes, le nombre moyen de boules dans l'urne B est égal à 1. La répartition des boules dans les deux urnes a tendance à s'équilibrer.

b) Utilisation d'un arbre



A la $k^{\text{ième}}$ étape, on obtient les arbres suivants :

Si k est impair	Si k est pair
$r_1 \xrightarrow{1} r_2$ $r_3 \xrightarrow{1} r_2$	$r_2 \begin{cases} \xrightarrow{0,5} r_1 \\ \xrightarrow{0,5} r_3 \end{cases}$

On retrouve alors les résultats du paragraphe précédent.

<u>Remarque :</u>

Le recours au calcul matriciel n'est vraiment utile que pour un grand nombre de particules mais le cas où $N = 2$ permet d'appréhender le problème en expliquant l'utilisation des matrices et en comparant les résultats obtenus avec ceux que l'on obtient avec l'utilisation d'un arbre.

c) Calcul du temps de retour moyen dans le cas $N = 2$

Considérons un processus de diffusion correspondant à $2n$ étapes et notons T_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'étapes pour revenir à l'état initial.

D'après l´étude précédente, on a :

$p(T_n = 1) = 0, p(T_n = 3) = 0$ et, pour tout entier naturel k, $p(T_n = 2k+1) = 0$;

$p(T_n = 2) = \frac{1}{2}, p(T_n = 4) = \frac{1}{4}$ et, pour tout entier naturel k non nul, $p(T_n = 2k) = \frac{1}{2^k}$.

Calculons l'espérance de T_n :

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^{2n} k\,p(T_n = k) = \sum_{k=1}^{n} 2k\,p(T_n = 2k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}}$$

Calculons cette somme de deux façons différentes.

- Première méthode

On calcule successivement les sommes géométriques :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}, \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}, \ldots, \sum_{k=n-1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \text{ et } \sum_{k=n}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$

En ajoutant ces sommes, on obtient :

$$E(T_n) = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$$

- Deuxième méthode

On considère la fonction définie sur **R** par $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{2^k}$. On peut également écrire :

$$f(x) = \frac{\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}} - 1}{\frac{x}{2} - 1} - 1 \text{ si } x \neq 2 \text{ et } f(2) = n.$$

Pour $x \neq 2$, les deux expressions de $f(x)$ permettent d'exprimer $f'(x)$ de deux façons différentes. On obtient alors deux expressions de $f'(1)$, ce qui permet de calculer $E(T_n)$.

On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} E(T_n) = 4$. On revient donc en moyenne à l'état initial au bout de 4 étapes.

Remarque :

Il est intéressant de constater que si $N = 2$, le processus est réversible.

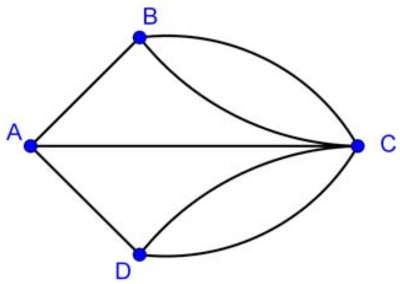
Cette étude est reprise et complétée dans la partie III.

D. Représentation d'un graphe. Notion de connexité

1. Parcourir un graphe

Chacun connaît l'histoire du parcours impossible empruntant une et une seule fois les sept ponts de la ville de Koenigsberg (aujourd'hui Kaliningrad), ponts reliant les rives (B et D) du fleuve qui traverse la ville, la Pregel, aux deux îles (A et C) que celle-ci forme, et les deux îles entre elles.

On dit que Léonard Euler (1707 – 1783) résolut le problème et mit en évidence l'absence de solution. L'humanité l'avait résolu en pratique avant lui, mais le génie d'Euler fut de fabriquer des mathématiques avec cette question, c'est-à-dire de donner des définitions donnant naissance à des théorèmes réutilisables dans d'autres situations.



Les ponts de Koenigsberg

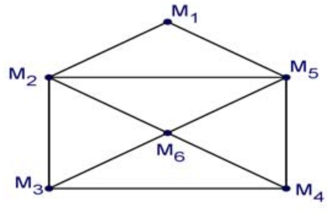
Le problème des ponts de Koenigsberg consiste en fait à savoir si un certain *graphe* est *eulérien* (c'est-à-dire si on peut en parcourir toutes les arêtes sans passer deux fois sur la même).

Voici quelques définitions.

Un graphe (non orienté) à n sommets est une suite finie de points distincts (M_1, M_2, …, M_n), appelés **sommets,** et d'**arêtes**, dont les extrémités sont des sommets. On considérera ici qu'il n'existe pas de **boucle**, c'est-à-dire d'arête ayant pour extrémités le même sommet, et qu'il n'existe pas non plus de point **isolé**, c'est-à-dire relié à aucun autre point.

Une **chaîne** de longueur $p \geq 2$ reliant M_i à M_j est une suite de sommets $\left(S_1, S_2, ..., S_p, S_{p+1}\right)$ telle que $S_1 = M_i$, $S_{p+1} = M_j$, et que, pour tout entier k compris entre 1 et p, il existe une arête reliant S_k à S_{k+1}. Dans le graphe associé au problème des Ponts de Koenigsberg, il n'existe pas de chaîne de longueur 1 reliant B à D.

Dans le graphe ci-dessous, (M_5, M_1, M_2) est une chaîne de longueur 2 reliant M_5 à M_2, (M_5, M_4, M_6, M_2) en est une de longueur 3, (M_5, M_6, M_4, M_2) une de longueur 4, etc.



Un graphe en forme d'« enveloppe »

Il n'existe pas de chaîne de longueur 1 reliant M_5 à lui-même, mais il en existe une de longueur 2 : (M_5, M_1, M_5). D'ailleurs, quand le graphe ne contient pas de point isolé (ce qui est notre hypothèse de travail), il existe toujours une chaîne reliant un point à lui-même.

Un graphe est dit **connexe** quand, deux points quelconques étant donnés, il existe une chaîne qui les relie.

2. Matrice d'adjacence d'un graphe

Un graphe à n sommets est caractérisé par les arêtes qui relient certains sommets entre eux. On peut donc représenter un graphe à n sommets (M_1, M_2, …, M_n) par un tableau à n lignes et n colonnes dans lequel, à l'intersection de la ligne i et de la colonne j, on écrit 0 si aucune arête ne relie M_i et M_j, et 1 si une arête les relie. Ainsi pour le graphe précédent (« l'enveloppe »), on obtient le tableau suivant :

	M1	M2	M3	M4	M5	M6
M1	0	1	0	0	1	0
M2	1	0	1	0	1	1
M3	0	1	0	1	0	1
M4	0	0	1	0	1	1
M5	1	1	0	1	0	1
M6	0	1	1	1	1	0

En notant a_{ij} le coefficient situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j, on définit un tableau à 6 lignes et 6 colonnes (matrice de format (6, 6)), appelée matrice d'adjacence du graphe :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice précédente contient de nombreux zéros, traduisant l'absence d'arêtes reliant certains sommets du graphe. Par exemple, à la lecture de la matrice, on peut dire qu'il n'y a pas d'arête reliant les sommets M_2 et M_4.

Afin d'étudier la connexité d'un graphe, on peut s'intéresser à l'existence de chaines de longueur 2 entre deux sommets.

Soient i *et* j deux entiers compris entre 1 et n (ici $n = 6$). L'existence d'une chaine de longueur 2 entre les sommets M_i et M_j correspond à l'existence d'au moins un indice k tel que $a_{ik} \neq 0$ et $a_{kj} \neq 0$ c'est-à-dire tel que $a_{ik}\, a_{kj} \neq 0$.

On observe alors que le nombre $b_{ij} = \sum_{k=1}^{k=6} a_{ik}a_{kj}$ est la somme de six termes dont chacun est le produit de deux nombres choisis parmi 0 et 1 ; à chacun des termes non nuls de cette somme est associée une chaîne de longueur 2 joignant M_i et M_j et une seule. Leur somme est donc le nombre de chaînes de longueur 2 joignant M_i et M_j.

Les coefficients b_{ij} définissent une nouvelle matrice B et les n^2 relations précédentes peuvent se traduire par la relation matricielle suivante :

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} & b_{56} \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & b_{65} & b_{66} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix} = A^2$$

qui définit le produit de la matrice A par elle-même.

Numériquement, la relation s'écrit ici :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

On peut ainsi lire dans la matrice de droite qu'il y a 3 chaînes de longueur 2 joignant le sommet M_3 au sommet M_5.

On peut ensuite définir les puissances successives de la matrice d'adjacence A et montrer par récurrence que, pour tout entier $p > 1$, les coefficients de la matrice A^p donnent les nombres de chaînes de longueur p allant d'un sommet du graphe à un autre.

3. Lire la connexité d'un graphe sur sa matrice d'adjacence

Le calcul numérique précédent a pour résultat une matrice B dont aucun coefficient n'est nul, ce qui signifie que chaque fois qu'on se donne deux sommets, il existe une chaîne de longueur 2 qui les relie. On peut donc conclure que le graphe de l'« enveloppe » est connexe.

Cela pouvait, bien sûr, se voir mais il faut imaginer des graphes possédant un grand nombre de sommets où « voir » n'est plus aussi évident.

Ce qui précède montre surtout qu'**un graphe peut être donné par sa matrice**.

En consultant les puissances successives de la matrice d'adjacence, on peut savoir s'il y a des chaînes de longueur 2, 3, … reliant tel sommet à tel autre. Mais jusqu'où calculer pour établir la connexité d'un graphe dans un cas quelconque ?

Considérons un graphe à n sommets ($n \geq 2$). Si une chaîne de longueur n ne passe pas par tous les sommets du graphe, alors elle passe au moins deux fois par le même sommet et on peut réduire la « boucle » qu'elle formait. Cet argument montre que pour étudier la connexité, il suffit de pousser la recherche jusqu'à la puissance n-ième. D'où le résultat suivant :

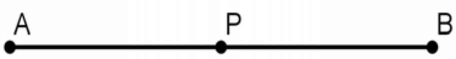
un graphe associé à une matrice d'adjacence A de format (n, n) (on dit aussi matrice carrée d'ordre n) est connexe si et seulement si, pour tout couple (i, j) d'entiers compris entre 1 et n, il existe un entier p compris entre 1 et n tel que le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A^p soit non nul.

E. Marches aléatoires

Dans cette partie, on s'intéresse au comportement à long terme d'une marche aléatoire. Il s'agit de calculer les probabilités pour le héros d'une marche aléatoire dans un réseau de se trouver après n pas en tel ou tel sommet (ou nœud) du réseau.

1. Marche aléatoire sur un segment

Le personnage se déplace d'un sommet à l'autre du graphe ci-dessous. S'il est en A ou en B, il ne peut aller qu'en P, s'il est en P, il peut aller en A ou en B avec des probabilités que nous considérons comme identiques.



On peut représenter la situation par une matrice M (dite de transition) qui indique non les arêtes existantes comme dans les matrices d'adjacence, mais les probabilités de passage d'un sommet à un autre. Les ***matrices de transition*** ne sont pas systématiquement symétriques. La matrice M ci-dessous représente la marche dans le réseau (A, P, B).

$$\begin{array}{c} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{P} \\ \mathrm{B} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \mathrm{P} & \mathrm{B} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Les coefficients figurant sur chaque ligne donnent les probabilités de passage du sommet qui donne son nom à la ligne à celui qui donne son nom à la colonne. La diagonale ne contient de ce fait que des 0.

Pour aller de A à A en deux pas, le personnage peut aller de A à A puis de A à A (les probabilités sont 0 et 0), ou de A à P puis de P à A (probabilités 1 et ½), ou de A à B puis de B à A (probabilités 0 et 0). La probabilité pour qu'il aille de A à A en deux pas est donc : $0 \times 0 + 1 \times \frac{1}{2} + 0 \times 0 = \frac{1}{2}$.

Pour aller de A à B en deux pas, le personnage peut aller de A à A puis de A à B (probabilités 0 et 0), ou de A à P puis de P à B (probabilités 1 et ½), ou de A à B et de B à B (probabilités 0 et 0). La probabilité pour qu'il aille de A à B en deux pas est donc : $0 \times 0 + 1 \times \frac{1}{2} + 0 \times 0 = \frac{1}{2}$.

La première probabilité s'obtient en additionnant terme à terme les produits des coefficients de la ligne correspondant aux déplacements partant de A par ceux de la colonne correspondant aux déplacements arrivant en A.

La seconde s'obtient en faisant la somme des produits terme à terme des coefficients de la « ligne A » par ceux de la « colonne B ».

En itérant le procédé on obtient la probabilité de chacun des trajets de deux pas. Cela revient à calculer le produit de la matrice précédente (notée M) par elle-même, c'est-à-dire la matrice M^2. Les coefficients qui figurent dans cette matrice M^2 sont les probabilités pour que le personnage situé au sommet qui donne son nom à la colonne se soit trouvé deux coups auparavant au sommet qui donne son nom à la ligne.

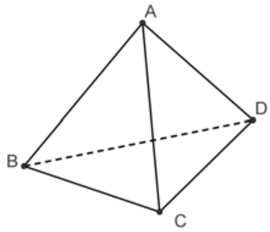
On obtient :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad et \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On constate que $M^3 = M$.

On peut interpréter ce résultat : par exemple, partant du sommet A, le personnage est sûrement en P après un nombre impair de pas, en B ou en A avec des probabilités $\frac{1}{2}$ après un nombre pair de pas.

2. Marche aléatoire aux sommets d'un tétraèdre



À la différence de la situation précédente, dans la marche aux sommets d'un triangle comme dans la marche aux sommets d'un tétraèdre, on peut passer, à chaque étape, de tout sommet donné à tout autre sommet donné.

Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, la matrice de transition (donnant les probabilités de passage d'un sommet à un autre) s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

On peut démontrer par récurrence que, pour tout entier n strictement positif, la puissance $n^{\text{ième}}$ de la matrice M s'écrit :

$$M^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & v_n & v_n \end{pmatrix}$$

où les termes généraux des suites (u_n) et (v_n) sont : $u_n = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$ et $v_n = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n}\right)$.

La lecture de ces matrices de transition est naturellement la même qu'au paragraphe précédent : le coefficient générique – celui situé sur la ligne i et la colonne j – de la matrice M^n donne la probabilité qu'une chaîne de longueur n permette de passer du sommet i au sommet j (on peut supposer que les sommets A, B, C, D sont numérotés 1, 2, 3, 4). Il n'y a pas d'ambiguïté dans ce cas, la matrice est symétrique (les puissances d'une matrice symétrique sont symétriques).

Les différences entre les différentes probabilités s'estompent rapidement : s'il n'est pas possible de passer d'un sommet à lui-même en un pas, les probabilités d'aller d'un sommet quelconque à un sommet quelconque sont très voisines dès que n est grand. En effet, la limite commune des deux suites (u_n) et (v_n) est $\frac{1}{4}$.

3. Un retour en arrière est-il possible ?

Ayant quitté un sommet du tétraèdre, au bout de combien de pas aléatoires le personnage peut-il compter y revenir ?

Soit X la variable aléatoire donnant, pour chaque marche, ce nombre de pas.

On a : $P(X=1)=0$, $P(X=2)=\frac{1}{3}$, $P(X=3)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$. En effet, pour que le personnage soit en A, par exemple, après n pas sans y avoir été dans aucune de ses positions précédentes, il est nécessaire qu'à chacun de ses déplacements précédents il soit passé d'un sommet qui n'était pas A à un autre qui n'était pas A non plus, choisissant donc l'un de deux sommets sur trois possibles.

On peut vérifier par récurrence que $P(X=n)=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\times\frac{1}{3}$, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et observer que :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=2}^{n}P(X=k)\right)=1$$

La variable X suit donc une loi géométrique.

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/marche/marche1.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/marche/marche2.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/marche/marche3.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/marche/marche4.jsp

F. Pertinence d'une page web[1]

1. De la recherche dans une bibliothèque à la recherche dans un graphe

Un moteur de recherche doit fournir à chaque utilisateur une liste de pages où apparaissent des mots-clés donnés dans la requête de celui-ci. On peut avoir l'idée de classer les milliards de pages disponibles dans un ordre permettant le tri à partir des mots-clés fournis. Cela demande des moyens de stockage considérables et la réorganisation continuelle (en temps réel, comme on dit) de ces archives. Il faut de plus assurer aux milliers de requêtes simultanées des réponses rapides, mais aussi des réponses fiables.

Un moteur de recherche copie dans un premier temps les pages web sur des milliers d'ordinateurs et les trie par ordre alphabétique des mots clés. La première idée simple consisterait pour chaque requête à fournir la liste de pages contenant le (ou les) mots clés de la requête. Mais il y en a des dizaines de milliers ! Aussi l'ordre alphabétique n'apparaît pas le meilleur pour assurer un service rapide et de qualité. Les pages référencées pour le client doivent donner une idée aussi juste que possible de l'information disponible au moment de la requête et faire apparaître en premières citations celles qui y répondent le mieux, les plus *pertinentes*.

Le web n'est pas une simple bibliothèque de pages web. Les pages web comportent des *liens* qui permettent d'accéder directement de l'une à d'autres. On peut donc considérer le web comme un graphe orienté, dont chaque page web est un sommet et chaque lien est un arc. L'idée pour déterminer la pertinence d'une page en lien avec un mot clé va être de s'appuyer sur l'existence de ces liens, en partant de l'idée basique que plus une page est citée, plus elle est *pertinente*.

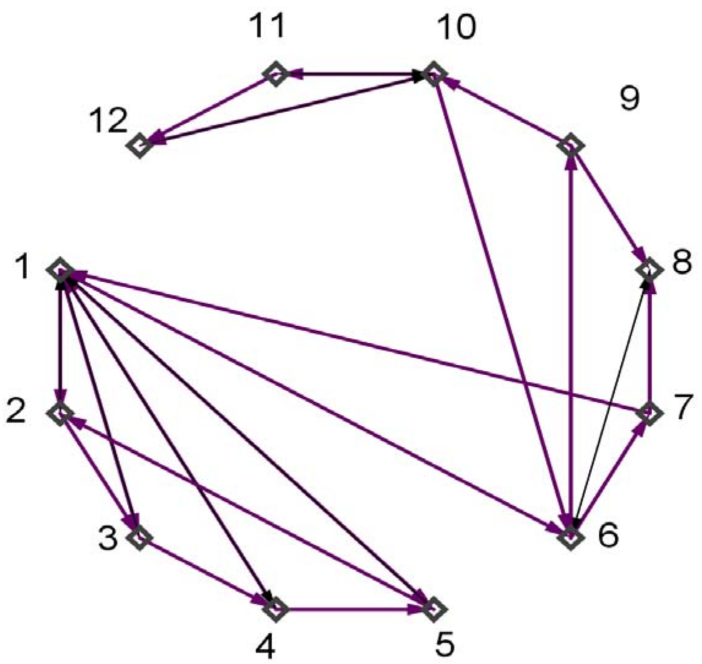
Dans la suite, les pages web sont numérotées 1, 2, …, i, …, n et un lien de la page i vers la page j est noté $i \to j$.

Ainsi on cherche à attribuer à chacune des pages une mesure de pertinence (un nombre réel ≥ 0).

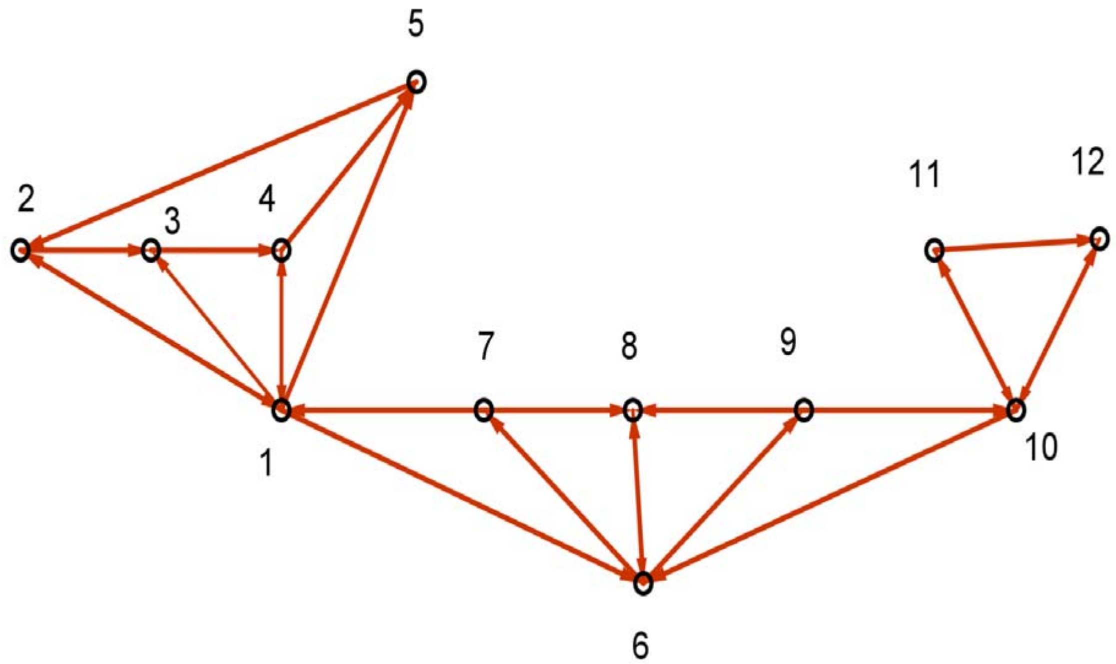
[1] Ce paragraphe est largement inspiré d'un texte de Mickael Eisermann, disponible à l'adresse suivante : www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eiserm/enseignement

2. Un exemple

Pour la suite, nous allons considérer un exemple excessivement simple avec seulement 12 pages web et les liens suivants :



Le graphe ci-dessus, qui ne comporte pourtant que 12 sommets, n'est pas très lisible. Les sommets les plus « fréquentés » n'y sont pas facilement identifiables.



Une nouvelle représentation de ce graphe, plus « buissonnante » à défaut d'être arborescente, met mieux en évidence l'importance des sommets 1, 6 et 10, vers lesquels « pointent » un nombre élevé d'autres sommets.

3. Mesurer la pertinence

Dans ce qui suit, on note μ_j la mesure de pertinence de la page *j*, pour tout entier *j* compris entre 1 et *n*, nombre de pages web disponibles à l'instant considéré, en rapport avec la requête considérée.

- Comptage naturel des liens

A chaque page *j*, on associe le nombre de liens $i \rightarrow j$ qui pointent vers elle.

Dans notre exemple, les pages 6 et 10 reçoivent chacune 3 liens, tandis que la page 7 en reçoit 1. On obtient donc : $\mu_6 = 3$, $\mu_{10} = 3$ et $\mu_7 = 1$.

Mais ce comptage n'est pas suffisamment discriminant et il est de plus très facile à manipuler, puisqu'il suffit de créer des « fausses » pages pointant vers la page *i* pour en augmenter l'importance.

- Comptage pondéré

On peut tenter de pondérer les liens : certaines pages émettent beaucoup de liens ce qui d'une certaine façon diminue leur poids.

Notons, pour chaque entier *i*, λ_i le nombre de liens émis par la page *i*.

On peut alors définir la mesure de pertinence de la page *j* en comptant le nombre de liens pondérés qui pointent vers elle :

$$\mu_j = \sum_{i \rightarrow j} \frac{1}{\lambda_i}$$

Dans notre exemple, $\mu_6 = 1{,}53$, $\mu_{10} = 2$ et $\mu_7 = 0{,}333$

Mais cette mesure présente toujours le même risque d'être manipulée.

- Comptage récursif

La pertinence d'une page est renforcée par la pertinence des pages qui pointent vers elle et elle est diminuée par la dispersion éventuelle des liens issus de ces dernières.

En reprenant la pondération précédente, on peut définir la pertinence d'une page *j* de la façon suivante :

$$\mu_j = \sum_{i \rightarrow j} \frac{1}{\lambda_i} \mu_i \quad (*)$$

Le risque de manipulation consistant en l'ajout de pages vides de sens est ici annulé puisqu'une telle page recevrait une mesure de pertinence nulle.

Avec le graphe présenté dans le paragraphe précédent, on obtient par exemple :

$$\mu_7 = \frac{1}{3}\mu_6 \text{ , } \mu_{12} = \frac{1}{2}\mu_{11} + \frac{1}{3}\mu_{10} \text{ , etc.}$$

On obtient ainsi un système d'équations linéaires.

On réécrit les formules (*) pour tout entier *i* compris entre 1 et *n* avec des coefficients notés $a_{i\,j}$, le coefficient $a_{i\,j}$ valant $\frac{1}{\lambda_i}$ si la page *i* pointe vers la page *j*, 0 sinon. On obtient ainsi le système linéaire de *n* équations à *n* inconnues (les μ_i). :

$$\mu_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,j} \mu_i \quad 1 \leq j \leq \text{n}$$

Les coefficients $a_{i\,j}$ définissent une matrice à *n* lignes et *n* colonnes (de format (*n*, *n*)), que l'on peut noter *A*.

Le système linéaire de n équations précédent correspond à l'équation matricielle suivante :

$$W = WA,$$

où W est une matrice ligne à n colonnes (format $(1, n)$), dont les coefficients sont les μ_j :

$$W = (\ \mu_1\ \ \mu_2\ \ldots\ \mu_n\ )$$

« Il n'y a plus qu'à » résoudre ce système, sauf que dans le cas du web il y a des milliards d'inconnues. Dans notre exemple, on obtient une matrice de format (12,12).

4. Pertinence et probabilités

Dans le système d'équations ($\mu_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mu_i \quad 1 \le j \le \mathrm{n}$) précédent, on peut remarquer la propriété suivante des coefficients a_{ij} :

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{n} a_{ij} = 1$$

En fait, pour un indice i fixé (c'est-à-dire dans la ligne i de la matrice) tous les coefficients non nuls sont égaux à l'inverse du nombre de liens émis par la page i, ce nombre correspondant également de ce fait à l'inverse du nombre de coefficients non nuls de la ligne i.

Les coefficients a_{ij} (tous positifs ou nuls) peuvent donc s'interpréter comme la probabilité, pour un « surfeur » qui se trouverait à la page i de suivre le lien qui l'amènerait à la page j. Cette probabilité est définie de la manière suivante : si λ_i liens sont issus de la page i, la probabilité pour que le surfeur aléatoire du web passe de la page i à une des pages vers lesquelles elle pointe est $\dfrac{1}{\lambda_i}$, la probabilité pour qu'il se dirige vers une autre est 0.

Notons X_p la variable aléatoire indiquant la position (numéro de page) du surfeur aléatoire après p clics. On a :

$$P(X_{p+1} = j) = \sum_{i=1}^{n} P_{[X_p = i]}(X_{p+1} = j) \cdot P(X_p = i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} P(X_p = i)$$

En notant U_p la matrice ligne à n colonnes admettant $P(X_p = i)$ pour coefficient à la colonne i pour tout entier i compris entre 1 et n, les relations précédentes peuvent se traduire par la relation matricielle suivante :

$$U_{p+1} = U_p A$$

On en déduit par récurrence que, pour tout entier p strictement positif, $U_p = U_0 A^p$, avec U_0 donnant la position du surfeur aléatoire au départ (U_0 est donc une matrice ligne à n éléments tous nuls sauf un qui vaut 1 et dont l'indice correspond au numéro de la page de départ).

Toutefois, il peut arriver que certaines pages ne comportent aucun lien vers d'autres pages ; dans ce cas, lorsque le surfeur aléatoire arrive sur l'une d'entre elles, il lui est impossible de la quitter. La ligne de la matrice correspondant à cette page ne comporte alors que des 0. Afin de remédier à ce défaut et sans doute coller mieux à la réalité, on introduit la possibilité de quitter à tout instant une page quelconque pour se diriger vers une autre choisie au hasard, et ce avec une probabilité égale à c.

Dans ces conditions, le modèle correspond au système de relations suivant pour tout entier p strictement positif et tout entier i compris entre 1 et n (puisque $\sum_{j=1}^{n} P(X_p = j) = 1$) :

$$P(X_{p+1} = j) = \frac{c}{n} + (1-c)\sum_{i=1}^{n} P_{[X_p = i]}(X_{p+1} = j) \cdot P(X_p = i) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{c}{n} + (1-c)a_{ij}\right) \cdot P(X_p = i)$$

qui se traduit par la relation matricielle suivante (pour tout entier $p > 0$) : $U_{p+1} = U_p\left[\frac{c}{n}J + (1-c)A\right]$

où J désigne la matrice carrée de format (n, n) dont tous les coefficients sont égaux à 1. Notons $B = \frac{c}{n} J + (1-c)A$.

On a alors, pour tout entier p strictement positif, $U_p = U_0 B^p$.

Il resterait à prouver que la suite de matrice (B^p) converge (dans un sens à préciser) lorsque l'entier p tend vers l'infini et expliquer comment récupérer les mesures de pertinence $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$.

La relation de récurrence précédente peut également se traduire par la relation de récurrence matricielle suivante :

$$U_{p+1} = (1 - c)U_p A + L$$

où L désigne la matrice ligne définie par : $L = \frac{c}{n}\begin{pmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\end{pmatrix}$.

Le paragraphe **5.** donne des indications sur l'étude d'une telle suite matricielle.

Remarque :

La matrice transposée d'une matrice M est la matrice $\widetilde{M}$ dont les colonnes sont égales aux lignes de la matrice M.

Par exemple, si $M = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ alors $\widetilde{M} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ et si $L = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ alors $\widetilde{L} = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

On peut également vérifier que, pour tout couple (A, B) de matrices « multipliables », on a :

$$\widetilde{AB} = \widetilde{B}\,\widetilde{A}.$$

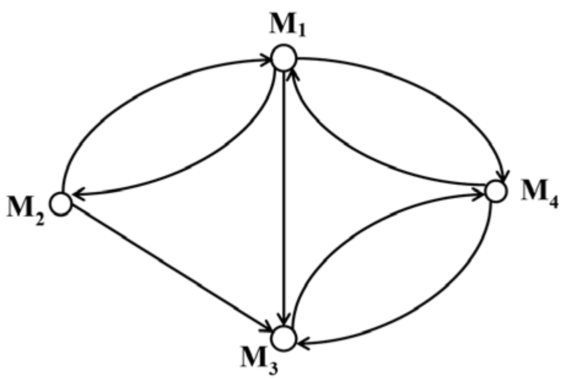
La relation matricielle $U_{p+1} = (1 - c)U_p A + L$ est équivalente à la relation matricielle obtenue en passant aux matrices transposées :

$$U_{p+1} = (1 - c)U_p A + L \iff \widetilde{U}_{p+1} = (1-\mathrm{c})\widetilde{A}\,\widetilde{U}_p + \widetilde{L}$$

où $\left(\widetilde{U}_p\right)$ est une suite de matrices colonnes et $\widetilde{L}$ une matrice colonne également, de même format.

Il n'est pas question de traiter ici le cas général. Nous allons nous contenter d'observer ce qui se passe sur un exemple élémentaire.

Dans l'exemple ci-dessous, le graphe représente les liens existant entre quatre pages web numérotées de 1 à 4 (M_1, M_2, M_3, M_4) :



La matrice A associée à ce graphe, telle que définie dans le paragraphe précédent, est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

On observe ici que la matrice n'est pas symétrique contrairement à la matrice d'adjacence définie dans la partie *d.* Cela tient au fait qu'ici le graphe est orienté.

On peut montrer que les puissances de la matrice A ont pour limite la matrice L ci-dessous. On a alors, quelle que soit la situation initiale U_0, $U_0 L = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{4}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}$

En conséquence, on attribue aux pages 1, 2, 3, 4 les indices de pertinence respectifs $\frac{3}{13}, \frac{1}{13}, \frac{4}{13}$ et $\frac{5}{13}$.

$$L = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{4}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{4}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{4}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{4}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

Dans le deuxième modèle, avec $c = 1 / 5$, on obtient la matrice :

$$B = \frac{1}{20} J + \frac{4}{5} A = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{19}{60} & \frac{19}{60} & \frac{19}{60} \\ \frac{9}{20} & \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{17}{20} \\ \frac{9}{20} & \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} \end{pmatrix}$$

On démontre que les puissances de la matrice B conduisent à une matrice limite et à des indices de pertinence qui sont $\frac{135}{572}, \frac{323}{2860}, \frac{171}{572}$ et $\frac{1007}{2860}$, à comparer aux indices trouvés précédemment.

Page	1	2	3	4
Sans saut aléatoire	0,23	0,08	0,31	0,38
Avec saut aléatoire	0,24	0,11	0,3	0,35

Ressource : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/pertinence/pertinence.jsp

5. Indications pour l'étude de la suite matricielle (U_p)

On commence par chercher un « point fixe » c'est-à-dire une matrice ligne H vérifiant la relation matricielle $H = (1 - c)HA + L$, c'est-à-dire $H = (I_n - (1 - c)A)^{-1}L$ si la matrice inverse existe.

On peut montrer (et nous l'admettons) que la matrice $(I_n - (1 - c)A)$ est toujours le cas ici car la matrice A est une matrice à coefficients positifs ou nuls tels que la somme des coefficients d'une quelconque de ses lignes vaut 1 (appelée matrice stochastique).

On pose $V_p = U_p - H$ et on obtient la relation $V_{p+1} = (1 - c)V_pA$ puis par récurrence la relation explicite $V_p = (1 - c)^p V_0 \cdot A^p$ ce qui donne $U_p = (1 - c)^p(U_0 + H) \cdot A^p + H$.

Indications pour prouver la convergence de la suite

On peut démontrer que le produit de deux matrices stochastiques l'est également et donc la matrice A^p l'est aussi.

On peut le démontrer à la main sur des matrices carrées d'ordre 2. Dans le cas général, on commence par remarquer que, pour toute matrice B à coefficients positifs, on a :

B stochastique $\Leftrightarrow$ $BX = X$ où X est la matrice colonne dont tous les coefficients valent 1.

Donc si B et C sont des matrices stochastiques alors on a $(BC)X = B(CX) = BX = X$ ce qui prouve que BC est une matrice stochastique.

La matrice A^p est donc une matrice stochastique ce qui implique que tous ses coefficients sont entre 0 et 1 et donc que tous les coefficients de la matrice $(1 - c)^pA^p$ tendent vers 0.

La relation $V_p = (1 - c)^p V_0 \cdot A^p$ prouve que tous les coefficients de la matrice ligne V_p s'expriment comme une combinaison linéaire (à coefficients constants) des coefficients de la matrice $(1 - c)^p V_0 \cdot A^p$ donc ont tous pour limite 0. On en déduit, de façon intuitive et naturelle, que la suite matricielle (V_p) a pour limite la matrice colonne nulle et que la suite (U_p) a donc pour limite H, la notion de convergence restant intuitive.

G. Traitement de l'image

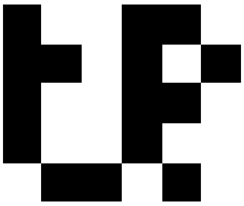
1. Numériser des images… imager les nombres

On a extrait l'image ci-contre d'une photographie d'Alan Turing disputant une course de 3 miles en 1946. Cette photographie a été reproduite sur un site web consacré à l'un des « inventeurs » de l'informatique dont l'adresse est donnée ci-dessous. Elle a donc été « numérisée », c'est-à-dire transformée en une suite de 0 et de 1. Le rectangle est décomposé en un certain nombre de petits carrés, et à chacun de ces carrés a été attribué un nombre qui représente une nuance de gris. La finesse de la décomposition (le nombre de carrés) est la *définition* de l'image. La définition de cette image particulière n'est pas bonne : on devine les *pixels* (mot fabriqué avec les débuts des mots anglais *picture element*).

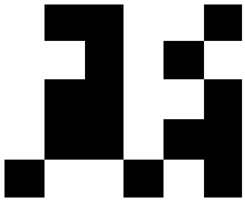
Toute image n'utilisant que le noir et le blanc peut ainsi être représentée par un tableau contenant autant de cases que l'image contient de pixels, chacune de ces cases étant occupée par 0 ou 1. L'image est donc représentée par une matrice dont tous les éléments sont 0 ou 1.

L'adresse du site consacré à Turing est : http://www.turing.org.uk/turing/scrapbook/run.html

2. Opérations sur les images

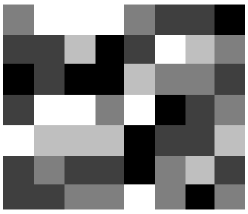


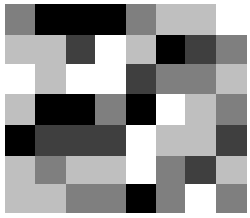
$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&0\\1&1&0&0&0&1\\1&0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&1&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0&1\\0&0&1&1&1&0\\0&1&1&1&0&1\\0&1&1&1&1&1\\1&0&0&1&0&1\end{pmatrix}$$



On transforme la matrice A associée à l'image de gauche en remplaçant 1 par 0 et 0 par 1, on obtient la matrice B, associée à l'image de droite, qui est le négatif de l'image de gauche.

On peut également coder des images en nuances de gris en attribuant à chaque pixel un nombre compris entre 0 et 1, proche de 1 si la case est gris foncé, proche de 0 si elle est gris clair. On peut également définir l'image négatif de l'image de départ en lui associant la matrice dont les éléments sont les compléments à 1 des éléments de la matrice de départ.





Les deux images ci-dessus sont le négatif l'une de l'autre. D'autres critères peuvent être enregistrés dans les éléments de la matrice associée à une image, la luminosité par exemple. Une multiplication de tous les éléments de la matrice représentant la luminosité par un même facteur modifie la luminosité de l'ensemble.

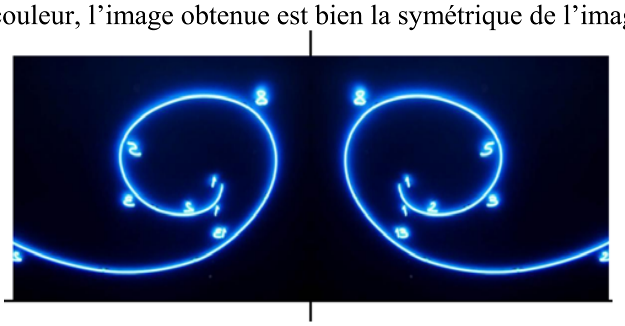
Si deux images ont le même format et la même définition (associées aux matrices A et B), il est possible de leur faire correspondre leur *somme*, associée à la somme des matrices qui les définissent, en convenant qu'un coefficient supérieur à 1 donne un pixel de couleur noire. On peut aussi leur faire correspondre leur *différence*, avec cette fois la convention que tout pixel associé à un nombre négatif est blanc, ou restituer l'image positive $|A - B|$ en particulier pour différentier les images et faire apparaître la trame des contours, horizontaux, verticaux, obliques.

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/image/image1.jsp,
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/image/image2.jsp,
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/image/image4.jsp,
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/image/image6.jsp,

Le logiciel Scilab peut également permettre des opérations sur les images, en lien avec les matrices. L'annexe 1 fournit quelques compléments à ce propos.

3. Comment modifier la forme d'une image ?

On se propose de transformer l'image de droite en sa symétrique par rapport à l'axe vertical, l'image de gauche. Pour cela, il suffit de représenter le symétrique de tout pixel de l'image de droite. Chaque pixel étant d'une seule couleur, l'image obtenue est bien la symétrique de l'image de départ.



Des photos de la spirale de Fibonacci dans le métro de Naples se trouvent à l'adresse suivante : www.danpiz.net/napoli/trasporti/StazioneVanvitelli.htm, page d'un site touristique sur Naples.

4. Des matrices pour réaliser des transformations

À tout point du plan, de coordonnées (x, y) données dans un repère (que nous choisirons orthonormal pour que l'action sur les figures soit mieux visible), on peut associer un autre point, de coordonnées (x', y') définies par l'action d'une matrice carrée $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ce qui s'écrit :

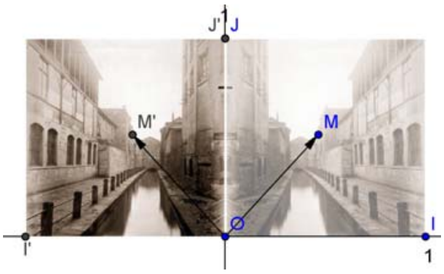
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ ou encore } \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}.$$

Si, par exemple, $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$ et $d = 0$, les coordonnées x et y d'un point quelconque sont transformées en $-x$ et y, qui sont les coordonnées de son symétrique par rapport à l'axe vertical.

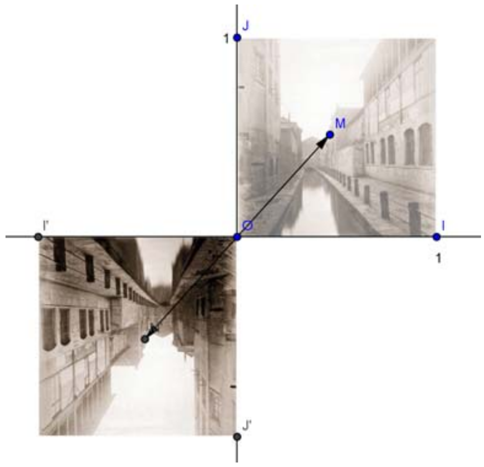
Les images suivantes fournissent sur une vue de la Bièvre aux Gobelins extraite d'une carte postale d'époque, des exemples d'actions d'une matrice sur une image.

Exercice : Trouver les coefficients correspondants.

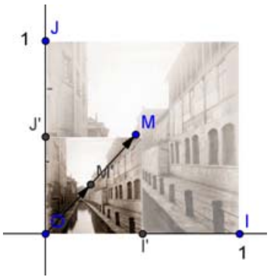
Réflexion d'axe (O*y*)



Symétrie centrale



Réduction (multiplication des dimensions par 0,5)



Affinité orthogonale de base l'axe (O*y*) de rapport 0,5