II. Définitions et premiers calculs avec des matrices

Dans cette partie, le vocabulaire spécifique aux matrices, les opérations sur les matrices et quelques résultats théoriques sont présentés après une introduction « intuitive » des notions dans le cadre de la résolution de problèmes comme dans les exemples proposés dans la première partie. Dans la partie III, d'autres problèmes seront résolus et on s'autorisera alors l'utilisation des matrices et la référence directe aux résultats théoriques énoncés dans la partie II.

A. Matrices. Opérations

1. Quelques définitions, quelques notations

Deux entiers naturels m et n étant donnés non nuls, on appelle matrice de format (m, n) tout tableau rectangulaire de $m \times n$ éléments, disposés sur m lignes et n colonnes. Dans les situations abordées ici, les éléments en question sont des nombres réels.

La matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \dots & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ peut aussi être notée $A = \left(a_{i\,j}\right)$, la notation $a_{i\,j}$ désigne le coefficient (l'élément, le terme) situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne. C'est le *coefficient générique* de la matrice A.

Lorsque $m = n$, on dit que la matrice est *carrée* (carrée d'ordre n si nécessaire). Les éléments $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{n-1,n-1}, a_{nn}$ sont les éléments de la *diagonale principale* de la matrice.

La ***matrice identité d'ordre n*** est la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de ceux situés sur la diagonale principale qui sont égaux à 1. Elle est **souvent notée I_n**.

L'égalité ne peut intervenir qu'entre deux matrices A et B de même format : elle signifie que, pour tout indice i et pour tout indice j, $a_{i\,j} = b_{i\,j}$. Une matrice dont tous les coefficients sont nuls est dite *matrice nulle* (mais deux matrices nulles qui n'ont pas le même format ne sont pas égales).

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/coefficient1.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/baseeuler/recherche_fiche.jsp?theme=4

2. Addition, produit par un scalaire

On peut faire la somme de deux tableaux de nombres ayant même nombre de lignes et de colonnes en procédant par addition place par place. C'est ce procédé qui est retenu pour définir l'addition de matrices de même format. Dire que les matrices A, B et C, de format (m, n), sont telles que $C = A + B$, c'est dire que :
pour tout entier i compris entre 1 et m, pour tout entier j compris entre 1 et n, $c_{i\,j} = a_{i\,j} + b_{i\,j}$.

On peut de même multiplier tous les éléments d'un tableau de nombres par un même nombre (pour appliquer une taxe, par exemple). C'est ce procédé qui est utilisé pour multiplier une matrice A par un *scalaire* λ (un nombre réel). On note λA la matrice obtenue. On a donc (avec une simplification de la notation) : $\lambda A = (\lambda a_{i\,j})$.

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/somme1.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/produit4.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/pdf/somme1.jsp

http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/somme2.jsp

3. Produits de matrices

Dans la partie I, nous avons rencontré :

- des produits de matrices de format (m, n) par des matrices colonnes de format (n, 1) tel :

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 29,2 \\ 30,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ 1,1 & 4,7 & 1,8 & 3,1 & 3,8 \\ 0,9 & 5,1 & 1,9 & 3,2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

- des produits de matrices lignes de format (1, m) par des matrices de format (m, n) tel :

$$\begin{pmatrix} 10,7 & 2,4 & 6 & 3,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & 0,8 & 0,1 \\ 0,5 & 0 & 0,33 & 0,17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- et des produits de matrices carrées par elles-mêmes, illustré par le schéma suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Plus généralement, soit A une matrice de format (m, n) et B une matrice de format (n, p). Le produit de A par B est la matrice C de format (m, p), notée AB, dont, pour tout i compris entre 1 et m et pour tout j compris entre 1 et p, l'élément c_{ij} est la somme des produits terme à terme des éléments de la i-ième ligne de A par les éléments de la j-ième colonne de B : $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

Par exemple le produit d'une matrice de format $(2, 3)$ par une matrice de format $(3, 4)$ donne une matrice de format $(2, 4)$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

L'utilisation du logiciel Scilab, qui dit si oui ou non la multiplication est possible, peut être extrêmement intéressante.

Il peut également être riche d'enseignements de différencier les produits de Hadamard (produit termes à termes de deux matrices) et produit de Cayley précédemment défini, ce que permet aussi le logiciel Scilab

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/produit3.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/produit2.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/pdf/produit3.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/pdf/produit2.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/produit5.jsp

4. Propriétés du produit des matrices carrées d'ordre n

Nous nous intéressons à présent au produit des matrices carrées d'ordre *n*. Ce produit *n'est pas commutatif*, ce qui signifie que, dans le cas $n = 2$ par exemple, il existe des couples de matrices (A, B) tels que $AB \neq BA$. Voici un exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 18 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$.

Certaines matrices ne sont pas inversibles pour ce produit. On a, par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 22 & 11 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 22 & 11 \end{pmatrix}.$$

On observe sur cet exemple que le produit de deux matrices distinctes par une même matrice donne deux matrices identiques.

En revanche les propriétés d'*associativité* (effectuer BC puis multiplier à gauche par A revient au même qu'effectuer AB puis multiplier à droite par C) et de *distributivité par rapport à l'addition* (le produit de A par la somme de B et C est la somme des produits de A par B et de A par C) font de l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 un cadre assez confortable pour les calculs.

Enfin on peut vérifier que, pour toute matrice A carrée d'ordre n, $AI_n = I_nA = A$.

B. Les matrices sont-elles inversibles ?

Nous avons vu que le produit des matrices carrées d'ordre 2 n'est pas commutatif. Le problème de la recherche d'un inverse pour une matrice donnée M s'exprime donc de la manière suivante : existe-t-il une matrice N telle que : $N \times M = M \times N = I_2$?

Nous avons vu que les matrices ne sont pas toujours inversibles : en effet, il existe des matrices A, B et C telle que $A \times B = A \times C$, bien que B soit distincte de C. Ce résultat met en évidence la non inversibilité de la matrice A (sinon on pourrait multiplier par l'inverse de A et obtenir $B = C$). En vertu de la *distributivité* évoquée plus haut, il vient $A \times (B - C) = O_2$ (O_2 matrice nulle d'ordre 2) ; il y a donc des *diviseurs de O* dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2.

Condition pour qu'une matrice carrée d'ordre 2 soit inversible

On se donne une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et on cherche s'il existe une matrice $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que $A \times B = B \times A = I_2$.

La première égalité s'écrit : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}z & a_{11}y + a_{12}t \\ a_{21}x + a_{22}z & a_{21}y + a_{22}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On obtient deux systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}z = 1 \\ a_{21}x + a_{22}z = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a_{11}y + a_{12}t = 1 \\ a_{21}y + a_{22}t = 0 \end{cases}.$$

Les seconds membres des équations de chacun de ces deux systèmes nous indiquent que la condition nécessaire pour qu'ils admettent des solutions (et en l'occurrence, ce sera un couple de solutions unique) s'écrit : $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ (D)

La quantité $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ est appelée *déterminant* de la matrice A. On vérifie que si le déterminant est non nul et si on pose $= \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} & \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} \end{pmatrix}$, les produits AB et BA sont tous les deux égaux à I_2. La condition (D) est donc une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité.

La matrice B est appelée matrice inverse de la matrice A et on la note A^{-1}.

C. Puissances de matrices carrées d'ordre 2 ou 3

Les problèmes rencontrés dans la première partie nous ont amenés à calculer des puissances de matrices. On peut faire les calculs avec une calculatrice pour des matrices de petite taille et des puissances raisonnables, on peut faire les calculs à l'aide d'un logiciel pour des puissances explicites, à l'aide d'un logiciel de calcul formel pour obtenir, dans les bons cas, des formules « closes », donnant l'expression des coefficients en fonction de l'exposant, mais il est plus difficile d'obtenir, dans le cas général, ce que nous avons appelé des *limites*.

1. Quelques matrices particulières

a) Les matrices triangulaires

Les matrices triangulaires ont des puissances triangulaires.

Considérons par exemple la matrice $T = \begin{pmatrix} a & d & f \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

Une telle matrice est dite triangulaire supérieure, car ses coefficients situés sous la diagonale principale sont nuls.

On obtient : $T^2 = \begin{pmatrix} a^2 & ad+bd & af+de+cf \\ 0 & b^2 & be+ec \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$. On pourrait poursuivre par une démonstration par récurrence pour prouver que, pour tout entier p strictement positif, T^p est une matrice triangulaire supérieure.

Les matrices *strictement triangulaires* comme $U = \begin{pmatrix} 0 & d & f \\ 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont leurs puissances nulles à compter de la troisième au plus. En effet : $U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ed \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $U^3 = O_3$. Les matrices dont les puissances

sont nulles à partir de l'une d'entre elles sont dites *nilpotentes.*
Une application des matrices triangulaires est présentée au II. F.

b) Les matrices diagonales

Les matrices diagonales (dont tous les coefficients non situés sur la diagonale principale sont nuls) ont des puissances diagonales dont les coefficients sont les puissances des coefficients initiaux.

c) Les matrices « creuses »

D'une façon générale, les matrices « **creuses** », celles dont beaucoup de coefficients sont nuls, sont recherchées, car cette particularité permet de gagner du temps de calcul machine. Ce gain de temps est aussi dû à la possibilité de réaliser des produits de matrices « par blocs ».

Considérons les matrices $A=\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 7 & 8 & -4 \\ 11 & 0 & -5 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 3 & 9 \\ -1 & 7 & 2 & -8 \end{array}\right)$ et $B=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & 8 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 2 & 11 \\ 1 & -5 & 7 & 2 \end{array}\right)$. Les lignes horizontales ou verticales tracées font apparaître des matrices :

$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$.

Par exemple, $A_{11}=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 11 & 0 \end{pmatrix}$, $B_{22}=\begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$. Les produits envisagés ayant tous un sens (il y a compatibilité entre les tailles des matrices à multiplier à chaque étape), on souhaite écrire que :

$$AB=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

Et, constatant que les sommes de produits de matrices sont elles aussi réalisables :

$$AB=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 32 \\ 11 & 57 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & 20 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -19 & 6 \\ 88 & 33 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -12 & 80 \\ -10 & -55 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -1 & -21 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 9 & -33 \\ -8 & 48 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -20 & 0 \\ -43 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 69 & 51 \\ -55 & 6 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \qquad AB=\begin{pmatrix} -2 & 52 & -31 & 86 \\ 11 & 57 & 78 & -22 \\ 9 & -41 & 49 & 51 \\ -9 & 27 & -95 & 3 \end{pmatrix}$$

Beaucoup de systèmes de calcul numérique travaillent, en interne, sur des listes ordonnées ou sur des tableaux. Si ces tableaux contiennent beaucoup de 0, les calculs seront plus faciles et sans doute plus justes, mais pas forcément moins longs si on n'a pas pris en compte l'abondance de ces 0.

Dans les situations de problèmes « à compartiments », par exemple, il est fréquent qu'à partir d'un état on ne puisse passer qu'à un état voisin, ce qui se traduit par une matrice de transition contenant beaucoup de 0.

Mais il y a naturellement des situations, très nombreuses, dans lesquelles les premières puissances d'une matrice ne laissent pas conjecturer la forme de sa puissance n-ième. On peut alors avoir recours à la diagonalisation, évoquée dans le paragraphe qui suit.

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/puissance2.jsp

2. Diagonalisation éventuelle d'une matrice carrée d'ordre 2

Les **matrices** considérées dans ce paragraphe sont toutes **à coefficients réels**.

Nous adoptons la définition suivante :

on dit **qu'une matrice carrée A est diagonalisable s'il existe une matrice carrée P inversible et des réels α et β tels que** $\boldsymbol{P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}P^{-1}}$ **.**

Compte-tenu de ce qui a été dit sur les matrices diagonales, on voit que, si la matrice A peut s'écrire :

$$A = P \times D \times P^{-1},$$

où D est diagonale, alors, pour tout entier naturel non nul n :

$$A^n = P \times D^n \times P^{-1},$$

ce qui facilite considérablement les calculs.

Cherchons une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A soit diagonalisable. Notons $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice inversible réalisant l'égalité $A = P \times D \times P^{-1}$.

L'égalité $A = P \times D \times P^{-1}$ est équivalente à l'égalité $A \times P = P \times D$ qui donne :

$$A \times P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}a + a_{12}c & a_{11}b + a_{12}d \\ a_{21}a + a_{22}c & a_{21}b + a_{22}d \end{pmatrix} = P \times D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha & b\beta \\ c\alpha & d\beta \end{pmatrix}$$

Considérons les matrices colonnes $V = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.

On observe que l'égalité $A \times P = P \times D$ est équivalente au système suivant : $\begin{cases} AV = \alpha V \\ AW = \beta W \end{cases}$.

Par ailleurs, on a vu précédemment que la matrice P est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ ce qui équivaut à dire que les vecteurs (a, c) et (b, d) ne sont pas colinéaires, c'est-à-dire que les matrices colonnes V et W ne sont pas proportionnelles.

Remarque :

On observe que si les matrices colonnes V et W ne sont pas proportionnelles, alors nécessairement elles sont toutes deux non nulles.

En conclusion, on peut énoncer la condition nécessaire et suffisante suivante :

Une matrice carrée A d'ordre 2 (à coefficients réels) est diagonalisable si et seulement s'il existe deux réels α et β (non nécessairement distincts) et deux matrices colonnes à coefficients réels non proportionnelles V et W telles que $AV = \alpha V$ et $AW = \beta W$.

Les réels α et β (s'ils existent) s'appellent les valeurs propres de la matrice A.

Remarque :

Les matrices carrées d'ordre 2 ne sont pas toutes diagonalisables.

En effet, si on écrit la matrice A sous la forme : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, dire que le produit de la matrice A par la matrice colonne V non nulle est proportionnel à V, c'est dire qu'il existe un réel λ et un couple de réels non tous les deux nuls (v_1, v_2) tels que $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Cette dernière condition traduit aussi l'existence de réels λ, v_1 et v_2 tels que :

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)v_1+a_{12}v_2=0\\ a_{21}v_1+(a_{22}-\lambda)v_2=0\end{cases}.$$

Si le déterminant du système d'équations linéaires en v_1 et v_2 écrit ci-dessus n'est pas nul, alors il n'a que le couple nul comme solution, ce qui ne satisfait pas l'hypothèse.

L'hypothèse exige donc que ce déterminant soit nul, c'est-à-dire que :

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=0.$$

L'existence des matrices colonnes V et W exige donc que l'équation du second degré en λ ci-dessus admette des solutions réelles, ce qui n'est pas toujours le cas, c'est pourquoi on peut dire que **les matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels ne sont pas toutes diagonalisables.**

Considérons par exemple la matrice $J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Pour elle, l'équation en λ s'écrit $\lambda^2+1=0$, qui n'admet pas de solutions réelles. Donc la matrice J n'est pas diagonalisable.

On pourrait également vérifier que la matrice $H=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$ pour laquelle l'équation en λ s'écrit $\lambda^2=0$ n'est pas non plus diagonalisable, mettant ainsi en évidence le fait que l'existence de solutions de cette « équation en λ » est une condition nécessaire non suffisante de diagonalisabilité.

D. Traitement matriciel des suites de Fibonacci

On s'intéresse dans ce paragraphe à la suite de Fibonacci, définie par :

$$u_0=1,\ u_1=1, \text{ et, pour tout entier } n\ :\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n.$$

1. Recherche d'une formule « close » pour le terme général

Spirale de Fibonacci dans le métro de Naples

On peut écrire, avec des notations à présent mieux maîtrisées :

$$\begin{pmatrix}u_{n+2}\\ u_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix}.$$

La matrice $F=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ peut être écrite comme le produit PDP^{-1}, où :

$$D=\begin{pmatrix}\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}&0\\0&\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix},\qquad P=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}&\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\1&1\end{pmatrix}\text{ et }P^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{5}}&\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\\-\dfrac{1}{\sqrt{5}}&\dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

Un raisonnement par récurrence donne, pour tout n : $\begin{pmatrix}u_{n+1}\\u_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}u_1\\u_0\end{pmatrix}$,

ou encore :

$$\begin{pmatrix}u_{n+1}\\u_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}&\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n&0\\0&\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{5}}&\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\\-\dfrac{1}{\sqrt{5}}&\dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_0\end{pmatrix}$$

Tous calculs faits, pour tout n supérieur ou égal à 2 : $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.

Certains pourraient trouver ce résultat étonnant, remarquant que, du fait de la définition, tous les termes de la suite sont entiers. Pour se convaincre que la formule ci-dessus donne bien des entiers, il suffit de comparer les termes d'ordre pair et les termes d'ordre impair des puissances à développer.

2. Trouve-t-on toujours une combinaison linéaire de suites géométriques ?

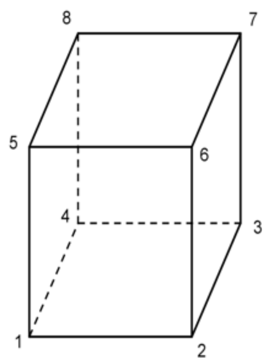
Nous avons écrit le terme général de la suite de Fibonacci de premiers termes 1 et 1 comme une combinaison linéaire des termes de deux suites géométriques.

Les calculs précédents sont adaptables à toute suite u dont les deux premiers termes sont donnés, et telle qu'il existe deux réels a et b pour lesquels pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$, pourvu que la matrice $M=\begin{pmatrix}a&b\\1&0\end{pmatrix}$ associée soit diagonalisable.

E. Retour sur les marches aléatoires

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons de nouveau à des marches aléatoires, dans le but de montrer qu'on peut, dans certains cas, découvrir des formules de récurrence pour déterminer les puissances n-ièmes de matrices de forme particulière.

Marche aléatoire sur un cube



Dans la marche aléatoire aux sommets d'un cube, le personnage peut passer à chaque étape d'un sommet à un des trois sommets voisins. Nous supposons qu'il y a équiprobabilité dans les passages d'un sommet à un autre. On associe à cette situation la matrice de transition suivante dans laquelle le coefficient situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne est la probabilité qu'un mouvement partant du sommet i s'achève au sommet j.

Cette matrice est :

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les particularités de cette matrice (elle est *symétrique*, c'est-à-dire symétrique par rapport à la diagonale principale, elle est décomposable en quatre blocs dont deux sont la matrice identité d'ordre 4) permettent de trouver intuitivement la forme de sa puissance n-ième.

On peut prouver par récurrence l'existence de quatre suites (u_n), (v_n), (w_n), (x_n), dont les termes sont les coefficients de la matrice M^n de la forme suivante :

$M^n = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & D & A & B \\ D & C & B & A \end{pmatrix}$, où A, B, C et D sont les quatre matrices carrées d'ordre 2 définies par :

$$A = \begin{pmatrix} u_n & v_n \\ v_n & u_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} w_n & v_n \\ v_n & w_n \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} v_n & w_n \\ w_n & v_n \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} x_n & w_n \\ w_n & x_n \end{pmatrix}$$

Après calculs, on obtient :

$$u_n = \frac{1+(-1)^n}{8} \times \frac{3^n+3}{3^n} \qquad w_n = \frac{1+(-1)^n}{8} \times \frac{3^n-1}{3^n}$$

et

$$v_n = \frac{1-(-1)^n}{8} \times \frac{1+3^n}{3^n} \qquad x_n = \frac{1-(-1)^n}{8} \times \frac{3^n-3}{3^n}$$

III. L'outil matrices à l'œuvre : compléments et exemples

Dans cette partie, nous serons amenés à utiliser des propriétés des matrices, ou des représentations matricielles de situations sans revenir sur ce qui a été développé dans la partie II. Tous les résultats ne sont pas établis, et ce point n'est pas nécessairement précisé chaque fois. Certaines des applications proposées devraient motiver les élèves et, espérons-le, susciter des vocations : aider les élèves à affirmer leur choix d'études supérieures scientifiques longues est le but de l'enseignement de spécialité mathématiques.

A. Matrices en arithmétique

1. Cryptographie : le chiffrement de Hill

a) Introduction et principe

Dans les plus anciens systèmes de cryptographie, chaque lettre est remplacée par une autre lettre, toujours la même. Les premières améliorations consistèrent à remplacer une lettre donnée par une autre, choisie en fonction de la place de la lettre à coder dans le texte de départ (en utilisant un mot-clef, par exemple). Le système de Hill (Lester S. Hill, *Concerning certain linear transformation apparatus of cryptography*, in American mathematical monthly, vol 38, (1931), p135 – 154) transforme des chaînes de caractères de longueur donnée, chaque lettre étant alors transformée en fonction de sa valeur et de sa place dans la chaîne de caractères.

On se donne un entier naturel n supérieur ou égal à 2. Le texte à chiffrer est découpé en blocs successifs de n lettres. S'il y a un reste, on peut compléter arbitrairement le texte ou l'amputer du bloc incomplet. Les lettres de chaque bloc sont remplacées par des nombres (généralement A = 0, B = 1, C = 2, …, Z = 25), et à chaque bloc de lettres est associée une matrice colonne B_i à n lignes. On se donne une matrice carrée M d'ordre n, appelée *matrice de chiffrement*, connue de l'expéditeur et du destinataire du message, à coefficients entiers naturels. Le produit $C_i = MB_i$ est une matrice colonne qui peut à son tour être transformée en une suite de n lettres, chacun de ses éléments étant ramené à son reste *modulo* 26 puis transformé en la lettre correspondante de l'alphabet. Pour décoder, il faudra faire le chemin inverse (si toutefois la suite des deux opérations produit de la colonne par la matrice suivie de détermination du reste *modulo* 26 est « inversible »).

b) Exemple

Utilisons la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Soit à chiffrer le texte CODAGE DE HILL. Le découpage en blocs de deux lettres et leur transformation en matrices colonnes donne : $\begin{pmatrix} 2 \\ 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Les matrices colonnes obtenues par l'action de M sur les matrices colonnes précédentes sont :

$\begin{pmatrix} 74 \\ 62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 \\ 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 54 \\ 53 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 77 \\ 77 \end{pmatrix}$, qui, *modulo* 26, donnent : $\begin{pmatrix} 22 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \end{pmatrix}$.

Le texte crypté est donc WK GJ GI AZ CB ZZ. Nous verrons par la suite comment le décrypter.

Utilisons la matrice $N = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$. Soit à chiffrer le texte AMER. Les mêmes procédés donnent les matrices colonnes $\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 17 \end{pmatrix}$, transformées en $\begin{pmatrix} 24 \\ 96 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 148 \end{pmatrix}$, ou encore en $\begin{pmatrix} 24 \\ 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \end{pmatrix}$, le texte crypté est donc YS YS, ce qui pose un problème puisque deux groupes de deux lettres différents ont été cryptés de la même manière. On perçoit ici les difficultés que va soulever le décryptage…

c) Réversibilité du cryptage

Si les deux matrices colonnes, produits respectifs de deux matrices colonnes distinctes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sont formées d'éléments ayant respectivement même reste modulo 26, on peut écrire :

$$\begin{cases} ax + by \equiv aX + bY \mod 26 \\ cx + dy \equiv cX + dY \mod 26 \end{cases},$$

On suppose par exemple que x et X sont distincts. Le système précédent conduit, en vertu des propriétés des congruences, à $(ad - bc)(x - X) \equiv 0 \mod 26$.

Cette relation exprime le fait que 26 est un diviseur de $(ad - bc)(x - X)$, or $(x - X)$ est en valeur absolue strictement inférieur à 26 et non nul. Les diviseurs premiers de 26 (2 et 13) ne peuvent donc tous deux diviser $(x - X)$. Il s'ensuit que $(ad - bc)$ et 26 ne sont pas premiers entre eux.

La condition « (ad- bd) est premier avec 26 » est donc une condition nécessaire pour que deux blocs de deux lettres différents soient cryptés différemment.

Nous admettons que cette condition est suffisante pour assurer le décryptage de tout message.

d) Exemple de décodage

La matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est certes inversible, mais sa matrice inverse, telle qu'elle a été définie précédemment ne répond pas au problème posé, mais ses coefficients vont être une aide pour répondre au problème posé. En effet, on trouve :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Pour assurer le décryptage, on cherche une matrice N à coefficients entiers telle que les coefficients des matrices MN, NM et I_2 soient congrus modulo 26.

Le calcul précédent de M^{-1} fait apparaître que :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = 7\mathrm{I}_2 .$$

Il ne reste donc plus qu'à déterminer l'inverse de 7 modulo 26, c'est-à-dire un entier u tel que $7u \equiv 1$ mod 26. Comme 7 et 26 sont premiers entre eux, il existe un unique entier u compris entre 0 et 25 et on trouve $u = 15$.

On a donc $15 \times 7 \equiv 1$ mod 26 ce qui se traduit par 15 est l'inverse de 7 modulo 26.

La matrice inverse modulo 26 de $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est donc la matrice $M' = 15\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Cette matrice est égale à $\begin{pmatrix} 18 & 23 \\ 19 & 22 \end{pmatrix}$ modulo 26.

Le texte crypté, scindé en blocs de deux lettres est WK GJ GI AZ CB ZZ.

Les rangs correspondants sont $\begin{pmatrix} 22 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \end{pmatrix}$.

Le bloc décrypté est obtenu en multipliant M'par chacune des matrices colonnes précédentes et en retenant le résultat modulo 26, soit :

$$\begin{pmatrix} 626 \\ 638 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 315 \\ 312 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 292 \\ 290 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 575 \\ 550 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 59 \\ 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1025 \\ 1025 \end{pmatrix}$$

ce qui donne, modulo 26

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

et qui permet de retrouver le texte initial CODAGEDEHILL.

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/crypto/hill1.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/inverse8.jsp

2. Approximation des nombres réels

a) Quelques rappels sur les fonctions homographiques

Nous nous intéressons aux fonctions homographiques à coefficients entiers définies sur $\mathbf{R}^+$, c'est-à-dire aux fonctions f définies sur $\mathbf{R}^+$ pour lesquelles il existe des entiers naturels a, b, c, et d tels que, pour tout réel positif x, $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Parmi ces fonctions, certaines sont constantes (celles pour lesquelles $ad - bc = 0$), certaines sont affines (celles pour lesquelles $c = 0$).

Il peut donc y avoir débat d'auteurs sur la définition.

Pour l'instant, nous nous contentons **d'écarter la situation $c = d = 0$,** pour laquelle il n'y a tout simplement pas de fonction. On peut aussi observer que le quadruplet (a,b,c,d) servant à caractériser une fonction comme homographique n'est pas unique. Bref, nous ne travaillons pas dans un cadre assuré. La propriété intéressante, que nous souhaitons utiliser pour cette étude, est qu'une fonction homographique à coefficients entiers naturels est monotone sur $\mathbf{R}^+$ et prend toutes les valeurs comprises entre $\dfrac{b}{d}$ et $\dfrac{a}{c}$ si elle est croissante, toutes les valeurs comprises entre $\dfrac{a}{c}$ et $\dfrac{b}{d}$ si elle est décroissante (on peut aussi dire que le sens de variation est donné par le signe de $ad - bc$).

b) Le calendrier : approximation d'un rationnel par un rationnel « plus simple »

Au début de l'année 2000, **l'année tropique** (intervalle de temps séparant deux passages du soleil dans la même position sur son orbite apparente – l'écliptique) était mesurée à **365,242 190 517 jours.**

Comment faire varier le nombre (entier) de jours dans une année sans bouleverser les habitudes de vie ?

C'est la question que des gouvernants ont eu à résoudre (en Égypte antique, à Rome sous Jules César, en Europe au XVIe siècle).

Les égalités suivantes, obtenues en utilisant l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}
1\,000\,000\,000 &= 4\times 242\,190\,517 + 31\,237\,932\\
242\,190\,517 &= 7\times 31\,237\,932 + 23\,524\,993\\
31\,237\,932 &= 1\times 23\,524\,993 + 7\,712\,939\\
23\,524\,993 &= 3\times 7\,712\,939 + 386\,176\\
7\,712\,939 &= 19\times 386\,176 + 375\,595\\
386\,176 &= 1\times 375\,595 + 10\,581
\end{aligned}$$

permettent d'écrire

$$\frac{242190517}{1000000000} = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{19+\cfrac{1}{1+\cfrac{10581}{375595}}}}}}}$$

<u>Remarque :</u> On peut naturellement poursuivre l'algorithme, mais cela n'aurait pas de lien avec l'objectif, qui est de fournir des approximations permettant de fabriquer un calendrier. Le calendrier grégorien prévoit d'ajouter 97 jours tous les 400 ans (1 jour tous les 4 ans sauf pour les millésimes multiples de 100 mais pas de 400). Rappelons que le rapport entre la durée de l'année tropique et celle du jour sidéral – durée de la rotation de la Terre sur elle-même – subit des variations telles qu'il est illusoire de les prévoir sur plusieurs milliers d'années.

Comme dit précédemment, pour tout réel positif x, $\frac{1}{x+4}$ est compris entre 0 et $\frac{1}{4}$. L'ajout d'un jour tous les quatre ans à l'année calendaire est donc exagéré. Si on poursuit les calculs, on peut écrire : $\frac{242\,190\,517}{1\,000\,000\,000} = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+y}} = \frac{y+7}{4y+29}$, ce qui permet d'affirmer que $\frac{242\,190\,517}{1\,000\,000\,000}$ est supérieur à $\frac{7}{29}$.

Ajouter 7 jours tous les 29 ans à l'année calendaire n'est pas suffisant. Poursuivons les calculs à l'étape suivante :

$\frac{242\,190\,517}{1\,000\,000\,000} = \frac{7z+8}{29z+33}$ montre que $\frac{8}{33}$ est une nouvelle approximation, meilleure que $\frac{1}{4}$ bien qu'encore exagérée.

Les fractions suivantes, $\frac{31}{128}$ et $\frac{597}{2465}$ sont successivement des approximations par défaut et par excès des modifications à apporter au calendrier pour s'approcher du rapport entre la durée de l'année tropique et celle du jour sidéral. Les valeurs approchées fournies sont (d'un certain point de vue qui sera développé dans la partie III) les meilleures possibles, mais on ne retrouve pas parmi elles les $\frac{97}{400}$ du calendrier grégorien.

Il est possible d'écrire ces calculs autrement : chaque nouvel « étage » de la fraction écrite plus haut peut être interprété comme l'intervention d'une fonction homographique. En appelant f_n la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$, on peut écrire :

$\frac{242\,190\,517}{1\,000\,000\,000} = f_4 \circ f_7 \circ f_1 \circ f_3 \circ f_{19} \circ f_1\left(\frac{10\,581}{375\,595}\right)$. Cette décomposition montre que les approximations trouvées le sont sous forme irréductible, et alternativement par excès et par défaut (les fonctions qu'on compose sont toutes décroissantes).

Il est possible de placer les coefficients des fonctions homographiques intervenant dans des tableaux, de sorte que, f_n étant représentée par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & n \end{pmatrix}$, $f_n \circ f_p$ le serait par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & p \\ n & 1+np \end{pmatrix}$, forme qui illustre le fait que $f_n \circ f_p$ est différente de $f_p \circ f_n$ dès que n et p sont différents.

c) L'exemple de $\sqrt{2}$

Le nombre $\sqrt{2}$ est la solution positive de l'équation $x^2 - 2 = 0$, qui peut encore s'écrire $x = \dfrac{x+2}{x+1}$, puisque -1 n'en est pas solution. Ce nombre est donc sa propre image par l'application de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$ qui donne de tout réel positif l'image $\dfrac{x+2}{x+1}$. Les paragraphes précédents fournissent un premier résultat : $\sqrt{2}$ est compris entre 1 et 2. Mais on peut aussi écrire que $\sqrt{2}$ est solution de $x = \dfrac{\frac{x+2}{x+1}+2}{\frac{x+2}{x+1}+1}$, par une substitution légitime. Tous calculs faits, on obtient : $x = \dfrac{3x+4}{2x+3}$, qui nous montre cette fois que $\sqrt{2}$ est compris entre $\dfrac{4}{3}$ et $\dfrac{3}{2}$. À l'étape suivante, en reprenant l'égalité $x = \dfrac{x+2}{x+1}$, on trouvera que $\sqrt{2}$ est solution de $x = \dfrac{7x+10}{5x+7}$, et que ce nombre est compris entre $\dfrac{7}{5}$ et $\dfrac{10}{7}$ (l'écart est inférieur à 3 centièmes).

d) Lien avec le produit des matrices

Les calculs précédents nous ont donné l'idée que la composée de deux fonctions homographiques est elle-même une fonction homographique. En effet, si on a :

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad et \quad g(x) = \frac{a'x+b'}{c'+d'}$$

Alors on obtient par composition :

pour tout x, $g(f(x)) = \dfrac{a'\dfrac{ax+b}{cx+d}+b'}{c'\dfrac{ax+b}{cx+d}+d'} = \dfrac{\left(a'a+b'c\right)x+a'b+b'd}{\left(c'a+d'c\right)x+c'b+d'd}$,

avec les précautions évoquées au paragraphe ***a.***).

On observe que si on associe la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à la fonction f et la matrice $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ à la fonction g, alors la matrice BA est précisément la matrice associée à la fonction $g \circ f$.

Cela fournit une technique de calcul des coefficients de la composée de deux fonctions homographiques.

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/homographique1.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/homographique2.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/homographique4.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/homographique5.jsp

e) Le cas du nombre d'Or

Le nombre d'or, noté Φ, est la racine positive de l'équation $x^2 = x+1$. Il peut également être considéré comme un *point fixe* de l'application *f*, définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$.

La fonction *f* est décroissante sur $[1,+\infty[$ et prend des valeurs comprises entre 1 et 2. Φ étant un point fixe de cette fonction, on peut obtenir un premier encadrement : $1 \le \Phi \le 2$.

La relation $f \circ f(\Phi) = f(\Phi) = \Phi$ montre que Φ est compris entre les extremums de la fonction $f \circ f$. Comme, pour tout *x* élément de $[1,+\infty[$, $f \circ f(x) = \dfrac{\dfrac{x+1}{x}+1}{\dfrac{x+1}{x}} = \dfrac{2x+1}{x+1}$, on déduit que :

$$\frac{3}{2} \le \Phi \le 2$$

Nous avons donc amélioré l'approximation par défaut de Φ. L'itération suivante consiste à composer une fonction croissante ($f \circ f$) par une fonction décroissante *f*. On obtient une fonction décroissante fournissant une nouvelle approximation par excès de Φ. La poursuite du procédé nous donne deux *suites adjacentes* convergeant l'une et l'autre (bien sûr) vers Φ.

f) Les réduites

L'analogie matricielle introduite précédemment conduit à considérer la suite des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ associées aux fonctions homographiques f^n.

Ces matrices satisfont à la relation de récurrence $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n+b_n & a_n \\ c_n+d_n & c_n \end{pmatrix}$, où on voit poindre les suites de Fibonacci.

Le quotient du premier terme de la première colonne de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ par le second est une valeur approchée de Φ, alternativement par excès et par défaut. Ces nombres sont appelés *réduites du développement en fraction continue de* Φ.

Le terme *fraction continue* lui-même provient de l'écriture possible : $\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots \cfrac{1}{\ddots +\cfrac{1}{1+\Phi}}}}}$.

Les réduites du développement de Φ en fraction continue sont données par le tableau :

1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	…
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	…

g) Les réduites comme « meilleures approximations rationnelles »

Plus généralement, considérons un nombre réel irrationnel positif x. Soit a_1 le plus grand entier inférieur ou égal à x. On peut écrire : $x = a_1 + u = a_1 + \frac{1}{y}\cdot$ Le nombre y est à son tour un nombre positif auquel on peut appliquer le même traitement : $x = a_1 + u = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{z}}\cdot$ Et ainsi de suite. On associe aux fonctions homographiques utilisées les matrices $\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, etc., qui ont toutes pour déterminant -1. Appelons $P_n = \begin{pmatrix} N_n & \alpha_n \\ D_n & \beta_n \end{pmatrix}$ le produit des n premières. On a alors :

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} N_n & \alpha_n \\ D_n & \beta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_n a_{n+1} + \alpha_n & N_n \\ D_n a_{n+1} + \beta_n & D_n \end{pmatrix}.$$

Les quotients des éléments de la première colonne de la matrice P_n s'écrivent sous la forme de fractions irréductibles (le déterminant de P_n est 1 ou -1, on applique le théorème de Bézout) et la relation précédente montre que le produit par la matrice $\begin{pmatrix} a_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ fait glisser en quelque sorte la première colonne vers la droite.

Considérons deux réduites successives $\frac{N_n}{D_n}$ et $\frac{N_{n+1}}{D_{n+1}}$, et supposons, pour fixer les idées, que $\frac{N_{n+1}}{D_{n+1}} > \frac{N_n}{D_n}$.

Rappelons que $N_{n+1}D_n - D_{n+1}N_n = 1$ et que $\frac{N_{n+1}}{D_{n+1}} - \frac{N_n}{D_n} = \frac{1}{D_{n+1}D_n}$.

Considérons un nombre rationnel $\frac{X}{Y}$ compris entre les deux : $\frac{N_{n+1}}{D_{n+1}} > \frac{X}{Y} > \frac{N_n}{D_n}$.

Notons $U = D_n X - N_n Y$ et $V = N_{n+1}Y - D_{n+1}X$.

La double inégalité précédente prouve que ces deux entiers sont strictement positifs.

On en déduit que : $X = N_{n+1}U + N_n V$ et $Y = D_{n+1}U + D_n V$ ce qui prouve que X est plus grand que N_{n+1} et Y plus grand que D_{n+1}.

Les réduites sont donc les meilleures approximations au sens suivant : toute approximation du nombre x plus précise que l'une quelconque des réduites a des termes plus grands que ceux de la réduite considérée.

Ressource : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/fractioncontinue/fraction2.jsp

B. Matrices et probabilités

1. La fougère de Barnsley

a) Des modèles de croissance pour les plantes

L'observation de la disposition des feuilles sur les tiges des végétaux, de la disposition des boutons floraux ou des étamines, a guidé l'étude mathématique puis l'élaboration de modèles de croissance. On pourra consulter utilement à ce propos H.S.M. COXETER *Introduction to geometry*, Wiley éditeur (Chapitre *Phyllotaxis*) et le classique LINDENMAYER & PRUSINKIEWICZ *The algorithmic beauty of plants*, Springer éditeur.

Ces modèles trouvent une utilité toute particulière dans l'industrie cinématographique, par exemple, le même modèle permettant de tourner au même endroit (fictif) et consécutivement une scène de printemps et une scène d'hiver.

Les probabilités sont utilisées ici pour modéliser le comportement de la nature.

b) Une transformation du plan

Les **transformations** du plan sont les **applications** (*stricto sensu*, bijectives) du plan dans lui-même. Comme un point du plan est repéré par ses deux coordonnées x et y, une transformation peut aussi être vue comme une application de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même. Par exemple,

$$f : M(x,y) \mapsto M'(x',y')$$

$$\text{où : } \begin{cases} x' = x^3 \\ y' = x + y \end{cases}$$

est une transformation du plan.

Seules celles dites **affines** nous intéressent ici. Pour une telle application, il existe des réels a, b, c, d, u et v tels que :

$$f : M(x,y) \mapsto M'(x',y')$$

$$\text{où : } \begin{cases} x' = ax + by + u \\ y' = cx + dy + v \end{cases}$$

Ce qu'on peut donc aussi écrire : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, qui peut aussi se noter $X' = AX + U$

Nous utilisons dans la suite quatre de ces transformations :

- f_1 pour laquelle $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,16 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- f_2 pour laquelle $A = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,04 \\ -0,04 & 0,85 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,6 \end{pmatrix}$
- f_3 pour laquelle $A = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,26 \\ 0,23 & 0,22 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,6 \end{pmatrix}$
- f_4 pour laquelle $A = \begin{pmatrix} -0,15 & 0,28 \\ 0,26 & 0,24 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,44 \end{pmatrix}$

c) La fougère de Barnsley (1988)

Voici le principe de sa construction, donné au pas à pas :

- Le premier point à dessiner est l'origine O, de coordonnées (0,0) ;
- Chacun des points suivants s'obtient en appliquant à son prédécesseur une transformation f, égale à f_1, f_2, f_3, f_4, avec les probabilités données par le tableau :

f	f_1	f_2	f_3	f_4
$P(f = f_i)$	0,01	0,85	0,07	0,07

Le principe de construction peut être conservé pour créer d'autres variétés de végétaux fictifs, dites mutantes.

*Voici le code **Scilab** de la fougère de référence, et une représentation avec 10 000 points*

```
function
point_image=transformation(point_antecedent,
choix)
  if choix == 1 then
    A = [[0,0];[0,0.16]] ; V=[0;0];
  end
  if choix == 2 then
    A = [[0.85,0.04];[-0.04,0.85]] ; V=[0;1.6];
  end
  if choix == 3 then
    A = [[0.2,-0.26];[0.23,0.22]] ; V=[0;1.6]
  end
  if choix == 4 then
    A = [[-0.15,0.28];[0.26,0.24]] ; V=[0;0.44]
  end
  point_image = A * point_antecedent + V
endfunction

nPoints = 10000
P = zeros(2,nPoints);
for i = 2:nPoints
  tirage = rand();
  if tirage < 0.1 then choix = 1;
  else if tirage < 0.86 then choix = 2;
    else if tirage < 0.93 then choix = 3;
       else choix = 4;
      end
    end
  end
  P(:,i) = transformation(P(:,i-1),choix);
end

plot(P(1,:),P(2,:),"*g");
```

Une feuille de fougère obtenue grâce au programme de gauche

Une fleur, elle aussi « programmée »
Photographie tirée de « The algorithmic beauty of plants »

Le livre « The algorithmic beauty of plants » est téléchargeable sur le site « The algorithmic botany at the University of Calgary » à l'adresse http://algorithmicbotany.org/papers/#abop

Ressource : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/barnsley/barnsley.jsp

2. Triangles rectangles pseudo-isocèles. Points à coordonnées entières sur une hyperbole

a) Triangles rectangles pseudo isocèles

Appelons triangle rectangle pseudo isocèle (en abrégé, TRPI), tout triangle rectangle dont les côtés ont pour longueurs des **entiers** $a, a+1$ et c, où c désigne la longueur de l'hypoténuse.

Par exemple, la séquence (3, 4, 5) définit un TRPI. Elle définit même le « plus petit TRPI » quand on classe les TRPI dans l'ordre croissant des valeurs de a.

Les séquences (a, a + 1, c) sont des **triplets pythagoriciens particuliers**. Mais tous les triplets pythagoriciens ne donnent pas des TRPI, à commencer par les « multiples entiers » des longueurs des côtés d'un TRPI donné comme (6, 8, 10) ou (9, 12, 15) obtenus par homothétie. Le théorème de Pythagore caractérise les TRPI par les couples (a, c) d'entiers vérifiant l'équation diophantienne :

$$a^2+(a+1)^2=c^2 \quad (**)$$

Il est alors envisageable de rechercher exhaustivement les TRPI en incrémentant progressivement a et en testant le caractère entier du nombre c qui lui est associé. Ce que nous réalisons sur le programme **Scilab** ci-dessous, balayant toutes les valeurs de a comprises entre 1 et 1000.

```
for  a = 1:1000
   c = sqrt(2*a^2+2*a+1);
   if c == floor(c) then
      disp([a,a+1,c]);
   end
end
```

On obtient quatre solutions, les triplets (3, 4, 5), (20, 21, 29), (119, 120, 169) et (696, 697, 985).

b) Recherche d'une expression générale

Le programme précédent fournit quatre solutions. Nous cherchons une expression générale fournissant toutes les solutions.

On définit par **récurrence** les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$ par $a_0 = 0$, $c_0 = 1$ et les relations de **couplage**, valables pour tout $n \geq 0$: $\begin{cases} a_{n+1}=3a_n+2c_n+1 \\ c_{n+1}=4a_n+3c_n+2 \end{cases}$.

Les raisons pour lesquelles on utilise ces relations sont indiquées en fin de ce paragraphe ***b***.

On peut vérifier que, si le couple (a_n, c_n) est solution de l'équation (**), le couple (a_{n+1}, c_{n+1}) est lui aussi solution, et une solution différente de (a_n, c_n). On peut également prouver que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante. À partir du couple (0, 1), on obtient donc une suite de couples solutions.

On obtient en fait toutes les solutions, résultat dont la justification sort sensiblement du cadre de ce document.

Les couples (a_n, c_n) se calculent de proche en proche. Ainsi :
(a_2, c_2) = (20, 29) ; (a_3, c_3) = (119, 169) ; (a_4, c_4) = (696, 985) ; (a_5, c_5) = (4059, 5741).

Le qualificatif de « pseudo isocèles » donné à ces triangles est justifié :
a_n grandissant très vite, le quotient des longueurs des deux cathètes tend vers 1.

Éléments de justification des relations définissant les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$

A partir des calculs effectués au paragraphe ***a***, on obtient :

$a_0 = 0$, $a_1 = 3$, $a_2 = 20$, $a_3 = 119$, $a_4 = 696$ et $c_0 = 1$, $c_1 = 5$, $c_2 = 29$, $c_3 = 169$, $c_4 = 985$.

On peut alors vérifier que : $c_2 - 6c_1 + c_0 = 0$, $c_3 - 6c_2 + c_1 = 0$, $a_2 - 6a_1 + a_0 = 2$ et $a_3 - 6a_2 + a_1 = 2$.

On définit deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ par les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} v_0 = 1, \quad v_1 = 5 \\ \text{Pour tout } n \geq 1, \quad v_{n+2} - 6v_{n+1} + v_n = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = 3 \\ \text{Pour tout } n \geq 1, \quad u_{n+2} - 6u_{n+1} + u_n = 2 \end{cases}$$

On détermine ensuite les expressions explicites de u_n et v_n pour tout n qui permettent de déterminer le système de relations proposé au début du paragraphe ***b***.

c) Des matrices pour expliciter les solutions

La construction récurrente décrite ci-avant constitue une première avancée. Mais pour parfaire notre étude, donnons une **expression close** des suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$ afin d'accéder directement à chacun des TRPI.

Nous pouvons représenter l'écriture $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 2c_n + 1 \\ c_{n+1} = 4a_n + 3c_n + 2 \end{cases}$ par $U_{n+1} = MU_n + V$,

où : $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ c_n \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

On obtient successivement : $U_1 = MU_0 + V$, $U_2 = M^2U_0 + MV + V$, $U_3 = M^3U_0 + (M^2 + M + I)V$, …

avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut plus généralement obtenir par récurrence le résultat suivant :

$$\text{pour tout entier naturel } n > 0,\ U_n = M^nU_0 + \left(M^{n-1} + M^{n-2} + \ldots + M^2 + M + I\right)V$$

Pour exprimer simplement les puissances de M, on a recours à la diagonalisation (lorsqu'elle est possible). Ce procédé conduit à écrire M comme un produit : $M = PDP^{-1}$.

On peut, par exemple, choisir :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3-2\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

On obtient donc :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(3+2\sqrt{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(3-2\sqrt{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

On peut se demander où sont passés les nombres entiers, qui constituent le cadre de l'étude. Ils vont, ils doivent, réapparaître après ce passage, simplement destiné à permettre le calcul explicite des a_n et c_n.

On peut écrire, pour $n > 0$:

$$M^{n-1} + M^{n-2} + \cdots . + M^2 + M + I = P \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} (3+2\sqrt{2})^k & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n-1} (3-2\sqrt{2})^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

où on voit apparaître des sommes de termes de suites géométriques, et donc la fin des calculs. Finalement :

$$a_n = \frac{1+\sqrt{2}}{4}(3+2\sqrt{2})^n + \frac{1-\sqrt{2}}{4}(3-2\sqrt{2})^n - \frac{1}{2}$$

et

$$c_n = \frac{2+\sqrt{2}}{4}(3+2\sqrt{2})^n + \frac{2-\sqrt{2}}{4}(3-2\sqrt{2})^n$$

On ne « voit » toujours pas les entiers dans ces écritures, mais on peut expliquer pourquoi a_n et c_n ainsi définis sont des entiers naturels.

3. Le problème du collectionneur

Un fabricant de produits alimentaires propose à ses acheteurs potentiels de constituer la carte de la France des 101 départements, chacun de ces départements étant figuré par un aimantin. Chaque conditionnement d'un certain produit contient un aimantin, les aimantins étant répartis de manière uniforme.

On se propose de déterminer le nombre moyen de boîtes qu'un collectionneur isolé, sans possibilité d'échanges avec d'autres personnes, doit se procurer pour réaliser la collection complète des départements.

a) Écriture de la matrice de transition

Nous allons représenter la situation comme une marche aléatoire entre des points situés sur une droite graduée, le point 0 représentant la situation du collectionneur n'ayant encore rien acquis, le point générique k celle du collectionneur ayant acquis k aimantins, le point 101 étant le point d'arrivée du parcours. On passe du point k au point $k + 1$ avec la probabilité $\frac{101-k}{101}$, on reste au point k avec la probabilité $\frac{k}{101}$. Dans la suite, nous utiliserons n à la place de 101 pour donner un contenu un peu plus général au problème. Pour mesurer la longueur du parcours, nous utiliserons la variable p. Nous essayons d'évaluer l'espérance mathématique de la variable aléatoire mesurant le nombre d'achats nécessaires à la complétion de la collection.

La matrice de transition est une matrice carrée d'ordre $n+1$. En vertu de ce qui précède, elle ne contient d'éléments non nuls que sur la diagonale principale et sur la « sur-diagonale », si on peut dire. Elle s'écrit :

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & 0 & \frac{2}{n} & \frac{n-2}{n} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \frac{3}{n} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{2}{n} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \frac{n-1}{n} & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut écrire cette matrice sous la forme :

$M=\left(\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline O & I \end{array}\right)$, où O est la matrice nulle à une ligne et n colonnes, I la matrice à un seul élément,1, et R la matrice colonne dont tous les éléments sont nuls sauf le dernier égal à $\frac{1}{n}$.

Cela simplifierait un peu les calculs que nous ne ferons pas dans le cas général.

b) Puissances de la matrice de transition

Les calculs suivants ont été effectués avec l'outil « Matrice puissance d'une matrice » disponible sur le site http://euler.ac-versailles.fr. Les puissances 10, 20 et 30 de la matrice M ont été calculées dans le cas $n=5$. On obtient successivement :

Soit M la matrices définie par

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et soit $k=10$.

La matrice M^k est la matrice définie par

$$M^k=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1953125} & \frac{2044}{1953125} & \frac{22392}{390625} & \frac{163704}{390625} & \frac{40824}{78125} \\ 0 & \frac{1}{9765625} & \frac{4092}{9765625} & \frac{342012}{9765625} & \frac{27984}{78125} & \frac{1184304}{1953125} \\ 0 & 0 & \frac{1024}{9765625} & \frac{6963}{390625} & \frac{2794506}{9765625} & \frac{1359204}{1953125} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{59049}{9765625} & \frac{1979054}{9765625} & \frac{7727522}{9765625} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1048576}{9765625} & \frac{8717049}{9765625} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

et soit $k=20$.

La matrice M^k est la matrice définie par

$$M^k=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{19073486328125} & \frac{2097148}{19073486328125} & \frac{6967277352}{19073486328125} & \frac{1085570781624}{19073486328125} & \frac{143847569376}{152587890625} \\ 0 & \frac{1}{95367431640625} & \frac{167772}{3814697265625} & \frac{167264988}{762939453125} & \frac{174248707248}{3814697265625} & \frac{90990301641624}{95367431640625} \\ 0 & 0 & \frac{1048576}{95367431640625} & \frac{418288299}{3814697265625} & \frac{131104692906}{3814697265625} & \frac{92079356061924}{95367431640625} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3486784401}{95367431640625} & \frac{17536397494}{762939453125} & \frac{93171895169474}{95367431640625} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1099511627776}{95367431640625} & \frac{94267920012849}{95367431640625} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

et soit $k=30$.

La matrice M^k est la matrice définie par

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{186264514923095703125} & \frac{2147483644}{186264514923095703125} & \frac{82355164347672}{37252902984619140625} & \frac{2304195893041838 64}{37252902984619140625} & \frac{740448020794422247 2}{7450580596923828125} \\ 0 & \frac{1}{931322574615478515625} & \frac{4294967292}{931322574615478515625} & \frac{1235333907666012}{931322574615478515625} & \frac{36873722701817232}{7450580596923828125} & \frac{18534242478790974566 4}{186264514923095703125} \end{pmatrix}$$

On constate que les coefficients des cinq premières colonnes sont de plus en plus faibles (on dirait qu'ils tendent vers 0), tandis que les coefficients de la dernière colonne tendent vers 1. C'est un résultat auquel on pouvait s'attendre : si le collectionneur a les moyens d'acheter autant de produits qu'il veut, on peut estimer qu'il finira par réunir la collection complète.

c) Espérance du nombre d'achats nécessaires

La variable aléatoire X dénombrant les achats à réaliser pour obtenir la collection complète peut être considérée comme la somme des variables aléatoires X_k dénombrant chacune les achats à réaliser avant d'obtenir le k-ième objet distinct alors qu'on en a déjà acquis k–1 distincts.

Soit k un entier non nul inférieur à n et soit j un entier naturel non nul. $X_k = j$ signifie qu'au j^{e} achat, le client a acheté $j - 1$ produits contenant un aimantin au moins en double parmi les $k - 1$ déjà en sa possession et qu'il a obtenu un aimantin différent parmi les $n-k+1$ autres aimantins existants. On en déduit que :

$$p(X_k) = \frac{(k-1)^{j-1}(n-k+1)}{n^j} \quad \text{soit} \quad p(X_k = j) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1}\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

La variable X_k suit la loi géométrique de paramètre $\frac{n-k+1}{n}$. Son espérance mathématique est donc $E(X_k) = \frac{n}{n-k+1}$.

La somme des espérances des variables X_k est l'espérance de la variable X qui vaut donc :

$E(X) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$, ou encore $E(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n-k+1}$, et, par changement d'indice : $E(X) = n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

En revenant au problème initial, on trouve que le collectionneur devra en moyenne acquérir 525 produits pour compléter sa collection.

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/collection/collection1.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/collection/collection2.jsp

4. Retour sur le modèle d'urnes de T. & P. Ehrenfest

Etude du cas N > 2

Certains résultats, trop complexes à prouver dans le cadre de cet enseignement de spécialité, sont énoncés. Ils sont destinés à sensibiliser les élèves aux résultats que l'on peut obtenir grâce à la puissance du calcul matriciel.

Des références sont indiquées en fin de paragraphe pour permettre à ceux qui le souhaiteraient, à titre personnel, de mieux comprendre le phénomène.

a) Le cadre général

On note X_0 la variable aléatoire égale au nombre initial de boules dans l'urne B.

À chaque instant n ≥ 1, on tire au hasard, de façon équiprobable, un numéro entre 1 et N et on change d'urne la boule correspondante.

Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne B à l'instant n > 0.

Ces variables aléatoires sont définies sur = $[\![0, N]\!]$.

On a pour tout couple (i, j) de $[\![0, N]\!]^2$, $p_{(X_n=i)}\left(X_{n+1}=j\right)=\begin{cases}\frac{i}{N} \text{ si } j=i-1 \\ \frac{N-i}{N} \text{ si } j=i+1 \\ 0 \text{ si } |i-j| \neq 1\end{cases}$.

- L'état du processus à l'instant n + 1 ne dépend que de l'état du processus à l'instant n, c'est-à-dire du passé immédiat. Un tel processus est un processus Markovien.
- $p_{(X_n=i)}\left(X_{n+1}=j\right)$ ne dépend pas de n. On dit que le processus est homogène.
- Notons $p_{ij}=p_{(X_n=i)}\left(X_{n+1}=j\right)$ et P la matrice carrée d'ordre N + 1 admettant les p_{ij} pour coefficients. On a donc :

pour tout j de $[\![0, N]\!]$, $p\left(X_{n+1}=j\right)=\sum_{i=0}^{N} p_{(X_n=i)}\left(X_{n+1}=j\right) \times p\left(X_n=i\right)=\sum_{i=0}^{N} p_{ij} \times p\left(X_n=i\right)$ (1)

et

$$P=\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{N} & 0 & \frac{N-1}{N} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{2}{N} & 0 & \frac{N-2}{N} & \ddots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{3}{N} & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ddots & \frac{N-2}{N} & 0 & \frac{2}{N} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{N-1}{N} & 0 & \frac{1}{N} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

P est appelée la matrice de transition du processus.

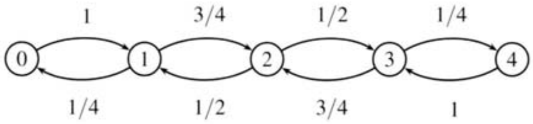
Soit pour tout n, la matrice ligne $V_n = (p(X_n=0) \;\; p(X_n=1) \;\; \ldots \;\; p(X_n=N))$.

Pour tout entier n, $V_{n+1} = V_n P$ (conséquence des relations (1) pour tout entier j de $[\![0, N]\!]$),
d'où $V_n = V_0 P^n$. Il suffit donc de calculer P^n pour estimer la répartition des boules dans les deux urnes.

b) Exemple pour 4 boules

$$E = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Graphe de transition :



$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

On suppose dans cet exemple qu'à l'état initial, toutes les boules sont dans l'urne A. On a donc $V_0 = (1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$.

On obtient aisément $V_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On obtient, à l'aide d'un logiciel de calcul formel :

$$P^n = \begin{pmatrix}
\left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2^{n+2}}\right) & \left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n+1}}\right) & \left(1+(-1)^n\right)\times\frac{3}{8} & \left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}\right) & \left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{2^{n+2}}\right) \\
\left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2^{n+3}}\right) & \left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n+2}}\right) & \left(1-(-1)^n\right)\times\frac{3}{8} & \left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+2}}\right) & \left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{2^{n+3}}\right) \\
\left(1+(-1)^n\right)\times\frac{1}{16} & \left(1-(-1)^n\right)\times\frac{1}{4} & \left(1+(-1)^n\right)\times\frac{3}{8} & \left(1-(-1)^n\right)\times\frac{1}{4} & \left(1+(-1)^n\right)\times\frac{1}{16} \\
\left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{2^{n+3}}\right) & \left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+2}}\right) & \left(1-(-1)^n\right)\times\frac{3}{8} & \left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n+2}}\right) & \left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2^{n+3}}\right) \\
\left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2^{n+2}}\right) & \left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}\right) & \left(1+(-1)^n\right)\times\frac{3}{8} & \left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n+1}}\right) & \left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2^{n+2}}\right)
\end{pmatrix}$$

Avec $V_0 = (1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$, on obtient :

$$V_n = \left(\left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2^{n+2}}\right) \quad \left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n+1}}\right) \quad \left(1+(-1)^n\right)\times\frac{3}{8} \quad \left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}\right) \quad \left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{2^{n+2}}\right) \right)$$

Le nombre moyen de boules dans l'urne B au bout de n étapes est $\mathrm{E}(X_n) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$. Avec le temps, on aura en moyenne 2 boules dans chacune des urnes.

c) Nombre moyen de boules dans l'urne B dans le cas général

On démontre, en utilisant des espérances conditionnelles, que $\mathrm{E}(X_n) = \frac{N}{2} + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n \left(E(X_0) - \frac{N}{2}\right)$ (D.FOATA et A.FUCHS- Processus stochastiques, DUNOD)

Dans le cas où N est supérieur à 2, $\mathrm{E}(X_n)$ tend vers $\frac{N}{2}$. Cela signifie qu'avec le temps, il y aura à peu près autant de boules dans les deux compartiments.

d) Temps de retour à un état initial k

On peut également démontrer que le temps de retour moyen à l'état k (c'est à dire, partant de l'état de k boules dans l'urne B, on retourne pour la première fois à k boules dans l'urne B) est :

$$m_k = \frac{2^N}{\binom{N}{k}}.$$

Le temps moyen de retour à l'état où l'urne B est vide est donc égal à 2^N.

L'étude des chaines de Markov permet de prouver que l'urne retrouvera son état initial de façon quasi-certaine (résultat de Pierre BREMAUD en 1988 par application du critère de Foster à la matrice de transition). Cependant, si N est un multiple du nombre d'Avogadro, égal à $6{,}02.10^{23}$, et que chaque transition se fait en une seconde, ce temps moyen est astronomique et quasiment infini à notre échelle. On n'observe donc pas de retour à l'état initial et cette « irréversibilité » est en grande partie due à la différence entre l'échelle de temps de l'observateur et celle du temps de retour.

Ressource : *SIMULATION DE L'URNE D'EHRENFEST* Son apport à l'appropriation des concepts d'équilibre statistique, d'irréversibilité, d'entropie, de flèche du temps Alain Marie-Jeanne 1, Frédéric Beau 1, Michel Janvier 1 (2003) disponible sur http://hal.inria.fr.

C. Suites liées par une relation non linéaire

Le modèle proie-prédateur de Volterra

Le mathématicien Volterra a proposé en 1926 un modèle décrivant l'évolution conjointe des sardines et des requins constatée par des pêcheurs de l'Adriatique : les effectifs des deux espèces variaient de façon périodique en fonction du temps, avec la même période mais en étant décalées dans le temps.

On considère deux populations dont les effectifs à l'instant t sont notés $A(t)$ et $B(t)$, qui désignent respectivement le nombre de proies et le nombre de prédateurs.

On suppose qu'en l'absence de prédateurs, la population des proies aurait un taux d'accroissement constant positif noté a et qu'en l'absence de proies, la population des prédateurs aurait un taux d'accroissement constant négatif noté $-d$.

On suppose de plus que lorsque les deux populations coexistent, l'effectif $A(t)$ augmentera d'autant moins vite que $B(t)$ sera grand et que l'effectif $B(t)$ augmentera d'autant plus vite que $A(t)$ sera grand.

Le modèle le plus simple est obtenu en supposant qu'il existe deux constantes positives b (quantité supposée constante de proies disparaissant par prédateur et par unité de temps, appelée « pression de prédation ») et c (quantité supposée constante de prédateurs « apparaissant » par proies et par unité de temps, appelée « accessibilité des proies ») telles que les coefficients d'accroissement par rapport au temps sont $a - b\,B(t)$ et $-d + c\,A(t)$.

On aboutit ainsi au système (S) d'équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = A(t)\big(a - bB(t)\big) \\ \dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = B(t)\big(-d + cA(t)\big) \end{cases}$$

Un tel système est appelé *système dynamique*. On peut aussi s'écrire $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = f\big(A(t), B(t)\big) \\ \dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = g\big(A(t), B(t)\big) \end{cases}$

On appelle *trajectoire stationnaire* du système tout couple de fonctions constantes (A^*, B^*) solution du système.

1. Discrétisation

Afin de « discrétiser » le problème, on décrit les populations à des instants successifs t et $t + \delta$ à l'aide de deux suites (A_n) et (B_n) de premiers termes A_0 et B_0 (effectifs à l'instant 0) et telles que pour tout entier n :

$$\begin{cases} A_{n+1} - A_n = \delta\,A_n\big(a - bB_n\big) \\ B_{n+1} - B_n = \delta\,B_n\big(-d + cA_n\big) \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} A_{n+1} = A_n\big(1 + a' - b'B_n\big) \\ B_{n+1} = B_n\big(1 - d' + c'A_n\big) \end{cases}$$

où $a' = \delta\,a$, $b' = \delta\,b$, $c' = \delta\,c$ et $d' = \delta\,d$.

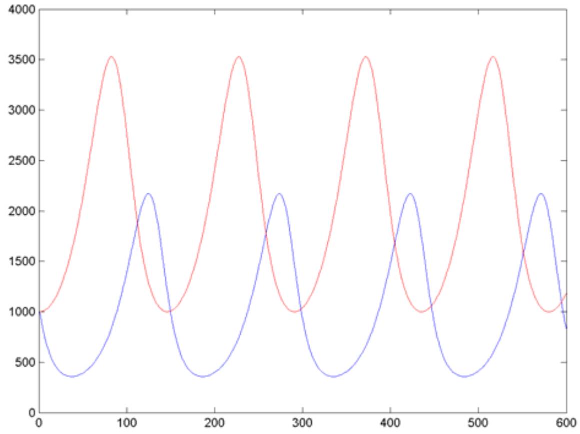
La valeur des rapports $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{d}{c}$ reste inchangée ; seules les valeurs des coefficients a, b, c et d sont modifiées. Dans la suite, on note à nouveau a, b, c et d les coefficients du système, et on s'intéresse donc à la résolution du système (S_1) :

$$\begin{cases} A_{n+1} = A_n\big(1 + a - bB_n\big) \\ B_{n+1} = B_n\big(1 - d + cA_n\big) \end{cases}.$$

qui fournit des résultats « satisfaisants » à condition de prendre des petites valeurs pour les coefficients a, b, c et d.

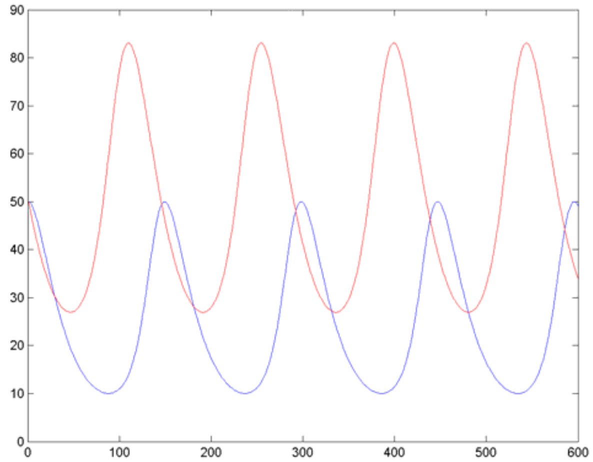
On observe qu'en faisant varier les coefficients a, b, c et d, on peut obtenir des évolutions conjointes des deux populations très différentes.
Les graphiques qui suivent représentent les évolutions simultanées des populations de proies et prédateurs. Ils sont obtenus à l'aide de la méthode d'Euler et réalisés avec le logiciel Matlab. Le nombre d'itération est 600, le pas égal à 1 et les données initiales sont 1000 proies et 50 prédateurs.
Les graphiques bleus sont obtenus avec les coefficients $a = 0{,}05$, $b = 0{,}002$, $d = 0{,}04$ et $c = 0{,}00004$ et les graphiques rouges avec les coefficients a =0,05, b = 0,001, d = 0,04 et c = 0,00002.

Proies



Temps

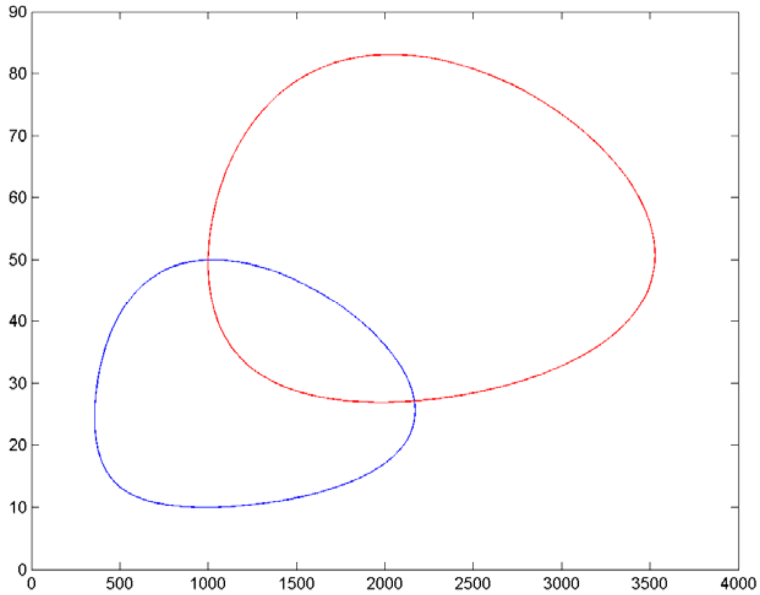
Prédateurs



Temps

Proies – Prédateurs

Prédateurs



Proies

2. Recherche d'un équilibre

Les effectifs des deux populations sont constantes si et seulement si $\begin{cases} A(t)\left(a-bB(t)\right)=0 \\ B(t)\left(-c+dA(t)\right)=0 \end{cases}$.

Ceci donne deux couples de fonctions constantes correspondant à des trajectoires stationnaires :

$$\left(A^*,B^*\right)=\left(0,0\right) \text{ et } \left(A^*,B^*\right)=\left(\frac{d}{c},\frac{a}{b}\right).$$

Par exemple, pour $a=0,05$, $b=0,001$, $d=0,02$ et $c=0,00002$ on obtient les valeurs suivantes :

Nombre de Proies = 1000, Nombre de Prédateurs = 50.

Il est de plus possible de caractériser une trajectoire stationnaire, qui peut être stable si une petite perturbation de A ou de B est suivie d'un retour à $\left(A^*,B^*\right)$ ou instable dans le cas contraire. Il est enfin possible de tracer le « portrait » du système dynamique en délimitant, dans le plan (A, B), les régions où les signes de A' et B' sont constants et en traçant les lieux des points où l'une des dérivées A' et B' est nulle.

3. Linéarisation autour du point d'équilibre (d/c , a/b)

On reprend le système (S_1) $\begin{cases} A_{n+1}=A_n\left(1+a-bB_n\right) \\ B_{n+1}=B_n\left(1-d+cA_n\right) \end{cases}$ et on se place au voisinage du point d'équilibre en posant $U_n=A_n-\frac{d}{c}$ et $V_n=B_n-\frac{a}{b}$.

On peut alors vérifier que le système (S_1) équivaut au système $\begin{cases} U_{n+1}=U_n-\dfrac{bd}{c}V_n-bU_nV_n \\ V_{n+1}=\dfrac{ac}{b}U_n+V_n+cU_nV_n \end{cases}$.

Si on se place au voisinage du point d'équilibre, le terme U_nV_n peut être considéré comme négligeable et on peut approximer le système (S_2) par le système linéaire $\begin{cases} U_{n+1}=U_n-\dfrac{bd}{c}V_n \\ V_{n+1}=\dfrac{ac}{b}U_n+V_n \end{cases}$ qui se traduit matriciellement par $\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{bd}{c} \\ \dfrac{ac}{b} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}$.

Soit $M=\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{bd}{c} \\ \dfrac{ac}{b} & 1 \end{pmatrix}$. On aura alors $\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}=M^n\begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}$

On peut étudier, à l'aide d'un logiciel et pour différentes valeurs de *a*, *b*, *c* et *d*, les puissances successives de la matrice *M* et les termes successifs des suites (U_n) et (V_n).

On peut aussi revenir au système continu et se placer à nouveau au voisinage de la trajectoire stationnaire en posant $A(t)=U(t)+\frac{d}{c}$ et $B(t)=V(t)+\frac{a}{b}$.

On peut alors vérifier que le système (S) s'écrit $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{bd}{c}V(t)-bU(t)V(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\dfrac{ac}{b}U(t)-cU(t)V(t) \end{cases}$.

En négligeant cette fois-ci les termes en $U(t)V(t)$, le système devient $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{bd}{c}V(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\dfrac{ac}{b}U(t) \end{cases}$.

En dérivant à nouveau les deux équations du système on aboutit à $U''(t)=-ad\,U(t)$ et $V''(t)=-ad\,V(t)$.

On admet qu'il existe donc des constantes α, β, γ et δ telles que, en notant $\omega=\sqrt{ad}$ (*a* et *d* constantes positives par hypothèse), on ait:

$$U(t)=\alpha\cos(\omega t)+\beta\sin(\omega t) \text{ et } V(t)=\gamma\cos(\omega t)+\delta\sin(\omega t).$$

Cela justifie la périodicité observée expérimentalement dans le système proies-prédateurs, la période valant ici $\frac{2\pi}{\sqrt{ad}}$.

4. Modèle perturbé

Pour rendre le modèle plus réaliste, on peut limiter les ressources alimentaires des proies, ce qui limite leur croissance. Il existe alors une constante *k* telle que le système dynamique s'écrive :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=A(t)\left(a-bB(t)-kA(t)\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=B(t)\left(-d+cA(t)\right) \end{cases}.$$

Les trajectoires stationnaires correspondent alors aux points d'équilibre $(A^*,B^*)=(0,0)$ et $(A^*,B^*)=\left(\frac{d}{c},\frac{a}{b}-k\frac{d}{bc}\right)$.

En posant cette fois-ci $A(t)=U(t)+\frac{d}{c}$ et $B(t)=V(t)+\frac{a}{b}-k\frac{d}{bc}$ et en négligeant encore les termes en $U(t)V(t)$, on aboutit au système linéaire $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=-k\frac{d}{c}U(t)-\frac{bd}{c}V(t)\\ \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{ac}{b}-k\frac{d}{b}\right)U(t)\end{cases}$ dont la matrice associée est $N=\begin{pmatrix}-k\frac{d}{c} & -\frac{bd}{c}\\ \frac{ac-kd}{b} & 0\end{pmatrix}$.

On peut comme précédemment (à une ré-écriture des coefficients près) lui associer le système discrétisé linéarisé :

$$\begin{cases}U_{n+1}=\left(1-k\frac{d}{c}\right)U_n-\frac{bd}{c}V_n\\ V_{n+1}=\left(\frac{ac-kd}{b}\right)U_n+V_n\end{cases}.$$

Dans le cas où $a=0,05$, $b=0,001$, $d=0,04$ et $c=0,00004$, le point d'équilibre non trivial est $(A^*,B^*)=\left(1000,50-k10^6\right)$ et $N=\begin{pmatrix}-1000k & -1\\ 0,002-40k & 0\end{pmatrix}$

On peut alors faire varier *k* et constater, sur le système discrétisé, que pour des valeurs très petites de *k*, le système converge vers le point d'équilibre, lorsque les valeurs initiales sont proches de ce point d'équilibre.

Ressource : http://interstices.info/jcms/n_49876/des-especes-en-nombre?hlText=volterra

IV. Annexe : utiliser Scilab pour numériser des images

A. Les matrices

1. Écriture

Les matrices s'écrivent entre crochets [ ], en mettant des virgules entre les éléments d'une même ligne, et des points virgules entre les différentes lignes :

M = [0,0,1,1 ; 2,0,2,0 ; 1,1,1,1] donne
0 0 1 1
2 0 2 0
1 1 1 1

zeros(2,4) donne une matrice de zéros avec 2 lignes et 4 colonnes.

zones(3,4) donne une matrice de uns avec 3 lignes et 4 colonnes.

2. Opérations

Soient M1 et M2 deux matrices de même format :

- M1 + M2 donne la somme élément par élément ;
- M1 – M2 donne la différence élément par élément ;
- k*M1 multiplie tous les éléments par le réel k ;
- M1 + k ajoute le réel k à chaque élément.

Soient M1 de format (m, n) et M2 de format (n , p) :

- M1*M2 donne le produit des matrices.

B. Les couleurs

1. Principe du codage

On utilise des matrices de nombres entre 0 et 1. À chaque élément de la matrice correspond un carré (pixel) colorié par une teinte de gris de sorte que plus le réel est proche de 1, plus le pixel dessiné est foncé.

2. Affichage du dessin en 256 teintes de gris

On définit la fonction affiche_matrice qui transforme la matrice M de nombres entre 0 et 1 en une matrice de numéros de teintes entiers compris entre 0 et 255, dans laquelle 0 correspond au noir et 255 correspond au blanc, et qui la dessine grâce à la fonction Scilab Matplot commentée ci-dessous.

```
function affiche_matrice(M)
  // Création d'une fenêtre graphique.
  f = scf();
  // On associe à la fenêtre graphique 256 teintes de gris.
  f.color_map = graycolormap(255);
  // Fond de la fenêtre blanc.
  f.background = -2;
  // Repère orthonormé.
  orthonorme;
  // On calcule (1-M) car dans la matrice M le 0 correspond au noir et le 1 au blanc,
  // on multiplie par 255 pour avoir des nombres entre 0 et 255, et on utilise la fonction
 // floor pour avoir des entiers.
```

```
   Matplot(floor((1-M)*255))
   // On enlève les axes.
   a = gca(); a.axes_visible = ["off","off","off"];
endfunction
```

C. Les transformations

Les codes Scilab correspondant à ces différentes fonctions et exemples sont fournis dans le paragraphe suivant.

Des fonctions

La fonction **negatif** donne le dessin en négatif.
La fonction **symetrique** opère une symétrie d'axe vertical.
La fonction **somme** permet de superposer des dessins.
Les fonctions **fonce1** et **fonce2** permettent de foncer le dessin de deux façons différentes.

Des exemples

Les codes « Lettres » et « Poisson » donnent des exemples de dessins même si le poisson n'est pas très ressemblant…

Le code « matrice_aléatoire » permet de générer des matrices de grande dimension avec des éléments entre 0 et 1.

D. Les codes Scilab

Les fonctions proposées utilisent certaines fonctions du module « lycée » à télécharger.

1. Pour afficher une matrice M

```
function affiche_matrice(M)
   f = scf();
   f.color_map = graycolormap(255);
   f.background = -2;
   orthonorme;
   Matplot(floor((1-M)*255))
   a = gca(); a.axes_visible = ["off","off","off"];
endfunction
```

2. Opérations

```
// Mise en négatif
function MM=negatif(M)
   MM = 1-M;
endfunction

// Symétrique
function MM=symetrique(M)
   t = taille(M); n = t(2);
   for i=1:n
      MM(:,i) = M(:,n-i+1);
   end
endfunction
```

```
// Somme
function MM=somme(M1, M2)
  MM = min(M1+M2,ones(M1));
endfunction

// Différence
function MM=difference(M1, M2)
  MM = max(M1-M2,zeros(M1));
endfunction

// Foncer en multipliant
function MM=fonce1(M)
  MM = min(2*M,ones(M));
endfunction

// Foncer en ajoutant
function MM=fonce2(M, k)
  MM = min(M+k,ones(M));
endfunction

// Lettres
S=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,1,1,1,1,0,0,0;
0,0,0,1,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,1,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,1,1,1,1,0,0,0;
0,0,0,0,0,0,1,0,0,0;
0,0,0,0,0,0,1,0,0,0;
0,0,0,1,1,1,1,0,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]
L=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0.5,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0.5,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0.5,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0.5,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0.5,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0.5,0.5,0.5,0.5,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;]
```

```
// Affichage d'une matrice (N, N) avec T teintes
N = 100; T = 200;
M = zeros(N,N);
for i = 1:N
   M(i,:) = tirage_entier(N,0,T-1)/(T-1);
end
affiche_matrice(M);

// Poisson
P=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0.5,0,0,0,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0.5,0.25,0.5,0,0,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0.5,0.25,0.5,0,0,0,0,0.5,0.5,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0.5,0.25,0.25,0.5,0,0,0,0.5,0.25,0.5,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0.5,0.25,0.25,0.5,0,0,0,0.5,0.25,0.5,0,0;
0,0,0,0,0,0,0.5,0.5,0,0,0.25,0.25,0.5,0.5,0.5,0.25,0.25,0.5,0,0;
0,0,0,0,0,0.5,0.25,0,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,0.5,0.5,0.5,0,0,0;
0,0,0,0,0.5,0.25,0,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,0.5,0.25,0.5,0,0;
0,0,0,0.75,0.25,0,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,1,0.25,0.25,0.5,0.5,0.75,0.75,0,0;
0,0,0.75,0.25,0,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,0.5,0.5,0.5,0.75,0,0;
0,0,0.75,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,0.5,0.5,0.5,0.5,0.75,0.75,0.5,0.75,0,0;
0,0,0,1,0.75,0.75,0.75,0.75,0.75,0.75,0.75,0.75,0.75,0.75,0.75,0.75,1,0,0,0;
0,0,0,1,1,0.25,0.75,0.25,0.75,0.25,0.75,0.25,0.75,0.75,1,0.75,1,0,0,0;
0,0,1,0.75,1,1,1,0.75,0.75,0.75,0.75,0.75,1,1,1,1,0.75,1,0,0;
0,0,1,1,0,0,0,1,1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,0,0;
0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]
```