DM $n°$1 de MATHEMATIQUES

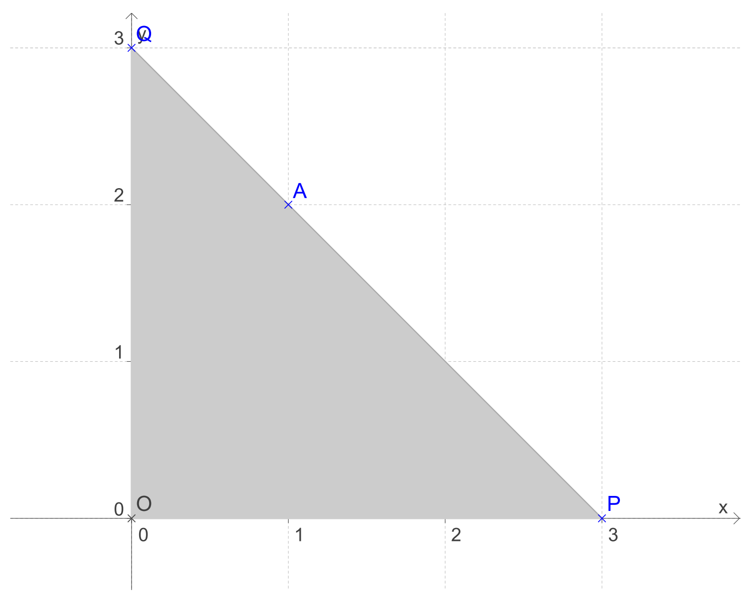
Pour Mardi 25 mars 2008

On apportera un soin à la qualité de la rédaction et à la tenue de la copie.

Exercice 1. *Un problème d'optimisation*

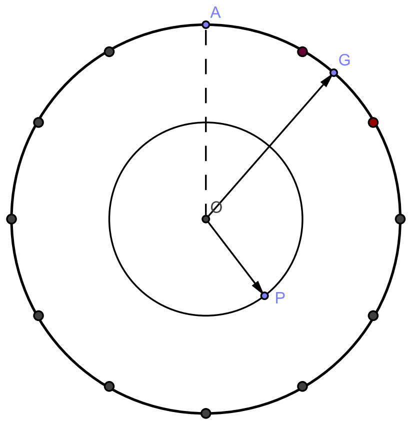
On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ *et* $g(x) = x$.

1. Préciser les ensembles de définition des fonctions f et g. On les notera D_f et D_g.
2. Démontrer que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-1}$.
3. Ecrire la fonction f sous la forme d'une composée de trois fonctions de référence.
   En déduire le sens de variation de f sur $]1; +\infty[$.
4. Construire dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm les représentations graphiques des fonctions f et g.
5. on pose $S = f + g$
   (a) Exprimer $S(x)$ en fonction de x.
   (b) Tracer la représentation graphique de la fonction S sur l'intervalle $]1; +\infty[$
   (c) Conjecturer l'existence d'un minimum m de la fonction S. Préciser la valeur de ce minimum.
   (d) Démontrer que pour tout $x \in]1; +\infty[$, $S(x) \geq m$
   (e) Conclure
6. Application :
   Sur le graphique ci-dessous, le point A a pour coordonnées $(1; 2)$. A chaque point P de l'axe (Ox) d'abscisse $x (x > 1)$, on associe le point Q de l'axe (Oy) de façon que les points A,P et Q soient alignés.
   Où doit-on placer le point P pour que l'aire du triangle OPQ soit minimale ?



Exercice 2. *(Les aiguilles)* L'objet du problème est de modéliser le mouvement des aiguilles d'une horloge, au cours d'une journée, pour pouvoir en découdre avec quelques casse-tête classiques.

1. **Modélisation du mouvement**
   Dans la figure ci-contre :

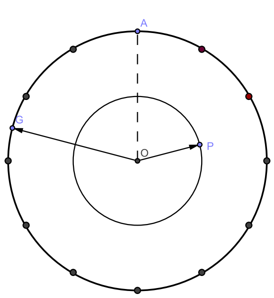


   – les cercles ont le même centre O ;
   – G est l'extrémité de la grande aiguille, P celle de la petite.
   – A est la position d'origine, c'est à dire la position de G à 0 heure.
   Enfin, on désigne par t $(0 \leq t \leq 24)$ le temps écoulé depuis 0 heure (ou minuit).
   Montrer que pour tout $t \in [0; 24]$, on a :
$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OG}) = -2\pi t \ [2\pi] \qquad (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}) = \frac{-2\pi}{12} t \ [2\pi]$$

2. **Etude d'un exemple**
   Il est 11 h 12 min.
   Quelle est, en degrés, la mesure de l'angle aigu entre les deux aiguilles ?

3. **Superposition**
   Exprimer en fonction de t les mesures de l'angle $(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OP})$.
   En déduire à quelles heures de la journée les deux aiguilles sont superposées.
   (On donnera les réponses à la seconde près)

4. **Symétrie**
   Sur l'horloge ci-dessous, donner l'heure exacte, à la seconde près, sachant que $[OG)$ et $[OP)$ sont symétriques par rapport à (OA).



5. **Orthogonalité**
   A quelles heures de la journée les deux aiguilles sont-elles perpendiculaires ?
   (Répondre à la seconde près)